40
Math. U.
90

R

Christian. Wink. del. *J. Mich. Söckler. sc. 1779.*

Math. 1116. b.

<36622204950019

<36622204950019

Bayer. Staatsbibliothek

4° Math Un 90

Mathesis. Introd. & historia 10.

R

Kurze Uebersicht
der
Mathematik und Physik,

wie sie

auf dem kurfürstl. Lyceum zu Amberg, der Hauptstadt in der obern Pfalz,

dermal gegeben werden

von

Johann Georg Prändel,

ordentlichem Lehrer der Natur- und Größenkunde auf hiesigem kurfl. Lyceum, auch korrespondirendem Mitgliede der baierschen Akademie der Wissenschaften.

München,
bey Joseph Lentner, 1804.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Da man in unsern Tagen die Publicität solcher Meinungen, Maximen, Verfassungen und Anstalten, die auf die Wohlfahrt des Staates mittelbaren oder unmittelbaren Einfluß haben, mehr als jemals begünstigt und anempfiehlt: so glaubte ich, daß Niemand mehr befugt seyn könne, sich dieses allgemein gepriesenen Vehikels bedienen zu dörfen, als ein öffentlicher Lehrer; um von dem Inhalte, von der Neuheit und Brauchbarkeit jener Sätze, womit er die ihm anvertraute Jugend des Vaterlandes bekannt macht, auch öffentliche Rechenschaft abzulegen.

Neben diesem Hauptgrunde bewog mich noch ein andrer, von gleicher Wichtigkeit, diese Sätze der Mathematik und Physik dem Drucke zu übergeben. Man sieht es heut zu Tage mit Recht sehr ungerne, ja man verbot es höhern Orts sogar, den Schülern in den öffentlichen Vorlesungen durch Diktiren die Zeit wegzunehmen. Da nun die Thesen zu mündlichen Prüfungen bisher meistentheils auf diesen Weg den Schülern mitgetheilt werden mußten; so sehe ich mich durch den öffentlichen Druck derselben für die Zukunft des Diktirens überhoben. — Indeß bleibt mir demungeachtet noch

)(2

immer die Freyheit, nach Erfoderniß des Zeitgeistes, oder unter Begünstigung eines erfinderischen Genius von Jahr zu Jahr neue Thesen einzuschalten, und andere minder wichtige dafür wegzustreichen. Auf diese Weise bekämen die vorliegenden Sätze von einem halben Decennium zum andern immer eine verjüngte Gestalt, und erfoderten eben so oft eine neue umgearbeitete Auflage.

Man wird bey der Durchlesung dieser Skitzen, besonders in den Thesen der angewandten Mathematik, auf sehr viele Sätze und Anwendungen stossen, die man in den bisherigen Lehrbüchern vergebens sucht: und dadurch, dächte ich, wäre es mehr als zu Genüge erwiesen, daß ich mir die 4 Jahre hindurch, seitdem ich nämlich als ordentlicher Professor über diese Lehrfächer öffentliche Vorlesungen halte, rastlose Müh gab, ihre Sphäre zu erweitern, das Dunkle und Schwere in denselben aufzuhellen und zu erleichtern, und die Brauchbarkeit der meisten Lehrsätze durch passende Beyspiele zu versinnlichen. Amberg, den 10. September, 1803.

Der Verfasser.

Kurze Uebersicht
der
Mathematik und Physik.

Amberg,
gedruckt mit kochischen Schriften.

Inhaltsanzeige.

1. Sätze aus den Anfangsgründen der Algebra. . . 2 Bögen.

2. — aus der Elementargeometrie und Trigonometrie 3 —

3. — aus der höhern Mathematik . . . . . . $1\frac{1}{2}$ —

4. — aus der allgemeinen Physik, und der dahin einschlägigen angewandten Mathematik. . 5 —

5. — aus der physischen Chemie. . . . . . . 1 —

6. — aus der sonderheitlichen Physik, und der dahin einschlägigen angewandten Mathematik. $1\frac{1}{2}$ —

Ver-

Verbesserungen.

In den Sätzen der Algebra, Seite 2, Linie 9, statt: Die entgegengesetzten Größen. — lies: Der entgegengesetzten Größen (ohne Punkt).

Seite 8, in der untersten Zeil, statt $a\sqrt{\frac{b}{a^n}}$ lies $a\sqrt[n]{\frac{b}{a^n}}$.

——— der allgemeinen Physik, Seite 11, Linie 7, statt Erdendrehung — lies: Erdumdrehung.

Seite 25, Linie 8, statt 2520 lies: 25200.

Seite 38 ist der Exponent 2 in den letzten zwey Proportionen vergessen worden. Es muß z. B. heißen: $q : q = (C + c)^2 : (\mathfrak{C} + \mathfrak{c})^2$.

Sätze
aus den Anfangsgründen der Algebra.

Seinen Schülern

zur Prüfung vorgelegt

vom

Professor Prändel.

München, bey Joseph Lentner, 1803.

I.

Vorbegriffe

1. Der Algebra.
   a) Erklärung,
   b) Verschiedene Benennungen,
   c) Kleine Geschichte.

2. Der Zeichen, womit die Algebra rechnet,
   a) Eintheilung,
   b) Form,
   c) Stellung.

3. Es kann noch gefragt werden:
   a) Wodurch sich die Koefficienten (Mitmehrer) von den Exponenten (Weisern) wesentlich unterscheiden.

b) Was von der Einheit als Koefficient oder Exponent zu merken sey.
c) Was man unter Würden verstehe.
d) Welche Würden auch Quadrate und Kubuse genannt werden, und warum.
e) Was ein algebraisches Glied sey.
f) Wann die Glieder gleichartig, wann ungleichartig heißen.

4. Die entgegen gesetzten Größen.
a) Begriff,
b) Eintheilung, und
c) Bezeichnung.

5. Regeln über
a) Ordnung,
b) Abkürzung mehrgliedrichter Größen.

II.

Algebraische Rechnungsformen.

6. Es wird gut seyn, aus der Arithmetik (Zahlenlehre) zu wiederholen, was Größen
a) addiren (sammeln),
b) subtrahiren (abziehen),
c) multipliciren (fältigen), und
d) dividiren (theilen) heiße.

7) Nachdem gesagt worden, worin das Geschäft der Addition in der Algebra bestehe, werden Regeln gegeben, vorzüglich für zusammengesetzte Größen, in Rücksicht

a) der gleichartigen, und
b) der ungleichartigen Glieder.

8. Die Hauptregel der Subtraktion ergiebt sich aus dem Gegensatze, und kann zum Ueberfluße noch erwiesen werden.

9. Die Regeln der Multiplikation sind theils willkührlich, theils nothwendig, und betreffen
a) die Buchstaben,
b) die Koefficienten,
c) die Exponenten,
d) die Zeichen + und —.

10. Die Regeln der Division müßen aus dem Gegensatze die verkehrten der Multiplication seyn.

11. Behandlung der algebraischen Brüche
a) bey ihrer Verkleinerung,
b) bey Ausdrückung derselben in Einheiten geringern Werths,
c) bey Anwendung der vier Rechnungsarten auf selbe.

12. Der Gleichung
a) allgemeiner Begriff, und
b) Eintheilung.

13. Erörterung:
a) Was man unter den Seiten der Gleichung verstehe;
b) Wodurch die Natur der Gleichungen versinnlicht werden könne;

c) Was das heiße, eine Gleichung ausführen;
d) auf welchen Grundsätzen so eine Ausführung beruhe.

14. Regeln:

I. Wie eine bekannte Größe von der Unbekannten hinweg gebracht werde,

a) Wenn sie bloß durch das Zeichen der Bejahung, und Verneinung damit verbunden ist,

z. B. $x - a = b$

und $b + y = c$.

b) Wenn sie als Faktor (Mehrer oder auch Fältiger), oder als Divisor (Theiler) dabey steht,

z. B. $a z = m$

und $\frac{v}{c} = f$.

II. Was zu thun sey:

a) wenn die unbekannte Größe im verneinten Zustand erscheint, z. B. $a - x = b + 1$;

b) wenn sie auf einer Seite öfter als einmal vorkömmt, z. B. $ax - bx = 2g$;

c) wenn sie sich auf beyden Seiten antreffen läßt, z. B. $c - 2y = 3y + m$;

d) wenn sie in irgend einem Gliede als Divisor auftritt, z. B. $\frac{a^2 - 1}{z} = 4b - a$.

* Versinnlichung der erstern Regeln durch leichte Beyspiele:

1. Von welcher Zahl muß 37 abgezogen werden, daß 29 übrig bleibt?
2. Was muß zu 67 addirt werden, daß die Summe 105 giebt?
3. Womit soll 85 multiplicirt werden, daß 1445 zum Produkt erscheint?
4. Was ist von 81 abzuziehen, daß 36 im Rest bleibt?
5. Welche Zahl ist durch 28 zu theilen, daß 16 zum Quotus erscheint?

III. In welcher Ordnung die unbekannte Größe von der bekannten nach und nach befreyt werden soll, z. B. $\frac{10z-b}{7a}+1=3z-4a^2$.

15. Des Verhältnißes
   a) Begriff,
   b) Abtheilung, und
   c) Bezeichnung.

16. Der geometrischen Proportion
   a) Erklärung,
   b) allgemeine Darstellung,
   c) Hauptgesetz, und
   d) Formveränderungen.

17. Anwendung der geometrischen Proportion
   a) auf die Regel detri, und
   b) auf die Reesische Regel.

18. Um ein gegebenes algebraisches Problem in eine oder mehrere Gleichungen zu bringen, kann man sich eines besondern Kunstgriffes bedienen.

19. Jedes Problem läßt sich allgemein auflösen, und dann können für ähnliche Fälle entweder Formeln oder Regeln gegeben werden.

* Beyspiele. 1) Ein Vater ist ein und fünfzig Jahre alt, der Sohn dreyzehn; wie lange wird es hergehen, bis der Vater noch so alt, oder dreymal älter als der Sohn seyn wird?

2) Ein Gastgeb hat zweyerley Wein, vom beßern die Maaß 1 fl. 20 kr., vom schlechtern 48 kr. Nun möchte er 64 Maaß so daraus mischen, daß die Maaß für einen Gulden gegeben werden könne; wie viel muß er von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

20. Eintheilung der Probleme von mehrern unbekannten Größen
a) in bestimmte, und
b) in unbestimmte.

21. Die bestimmten Aufgaben oder Probleme lassen sich behandeln
a) durch Substitution (Auswechslung) der unbekannten Größen gegen ihre Werthe;
b) durch Komparation (Zusammenstellung) gleicher Werthe ein und der nämlichen unbekannten Größe;
c) durch Anwendung einer Rechnungsart zwischen ganzen Gleichungen.

* Beyspiele: 1) Aus der Summe und aus dem Unterschiede zweyer Zahlen oder Größen diese Größen selbst zu bestimmen.

2) Drey Fürsten berechnen die Stärke ihres Bündnißes so: A sagt: Gebt ihr mir die Hälfte eurer Macht, so kann ich 29500 Mann in's Feld stellen. B sagt: Gebt ihr mir den vierten Theil, so bin ich gerade 23000 Mann stark. C erwiedert: Gebt ihr mir den dritten Theil, so habe ich 29000 vollzählig. Wie stark ist jeder für sich?

III. Wür-

XIX.

Würdenlehre.

22. Erklärung

a) des Erhebens einer Größe zu Würden;

b) des Wurzelausziehens.

* Ursache, warum die Würdenlehre ein so ziemlich weitschichtiges Feld sey.

23. Es wird gezeigt, unter welchen Umständen sowohl Summen als Differenzen

a) der Würden, und

b) der Wurzeln sich abkürzen lassen.

24. Auch das Multipliciren und Dividiren der Würden durch Würden läßt sich nur unter gewissen Umständen wirklich verrichten.

25. Hier ist der Ort, folgende Sätze zu erweisen:

1) Jede Größe zur Null erhoben gilt Eins.

$$a^0 = 1.$$

2) Würden mit verneinten Exponenten sind Brüchen gleich, deren Zähler die Einheit ist, und der Nenner die nämliche Größe, aber mit bejahten Exponenten vorstellt.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

* Nutzen dieser beyden Sätze.

26. Von gleich grosser Brauchbarkeit sind auch folgende Behauptungen:

1) Würden werden zu andern oder neuen Würden erhoben, wenn man die Exponenten multipliciret.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

2) Aus Würden werden Wurzeln gezogen, wenn man den Exponenten der Würde durch den des Wurzelzeichens theilet.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

3) Aus Wurzeln werden wieder andere Wurzeln gezogen, wenn man die Exponenten der Wurzelzeichen mit einander multiplicirt, und das Produkt in ein einziges Wurzelzeichen hinein schreibt.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

* Nutzen.

27. Oft frommen auch nachstehende Regeln:

1) Soll ein Faktor, der vor einem Wurzelzeichen steht, hinter dasselbe gebracht werden, so erhebe man ihn zu der Würde des Wurzelexponenten, und multiplicire damit die Größe hinter dem Wurzelzeichen.

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a}.$$

2) Will man eine beliebige Größe vor das Wurzelzeichen bringen, so erhebe man sie ebenfalls zu der Würde des Wurzelexponenten, und theile damit die Größe hinter dem Wurzelzeichen.

$$\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{\frac{b}{a^n}}$$

28. Den Beschluß der Würdenlehre machen die beyden Lehrsätze:
1) Die Quadratwurzel aus jeder bejahten Größe hat einen bejahten und verneinten Werth zugleich.
$\sqrt{a^2} = \pm a$, d. i. $= + a$ und $- a$.
2) Die Quadratwurzel aus einer verneinten Größe ist unmöglich.

IV.

Anwendung der Würdenlehre auf die Theorie der Decimalen (zehentheiligen Brüche).

29. Der Decimalen
a) Erklärung,
b) allgemeine Darstellung,
c) Schreib- und Lesart,
d) Verwandlung in gemeine Brüche, und wechselsweise.

* Beyspiele. 1) Ein hannöverisches Dragonerpferd hat mit Reiter und Rüstung nebst Fourage auf vier Tage im Durchschnitte nach baierschem Gewicht zu tragen 347,515625 Pfund; was betragen diese Decimalen in einem gemeinen Bruche?

2) Der baiersche Schuh ist ein Bruch vom rheinischen, und hält $\frac{12650}{13919}$ des letztern; wie drückt man dieß decimalartig aus?

30. Regeln und Beweise derselben, wie Decimalen
a) in eine Summe gebracht,

b) von einander abgezogen,
c) gefältigt, und
d) getheilt werden.

* Beyspiele. 1) Bey einer Karline befinden sich an Gold 9,25 Grän, an Silber 1,875, und an Kupfer 0,875; was wiegt sie?

2) Ein Laubthaler ist 1,6875 baiersche Loth schwer; ein Konventionsthaler hingegen 1,6 Loth; — um was ist der Konventionsthaler geringer als der Laubthaler?

3) Der Sulzbachische Quadratschuh ist um 0,1155 baiersche Quadratschuh größer als der baiersche; wie viel beträgt ein Sulzbacher Tagwerk von 40000 Quadratschuh mehr als ein baiersches von eben so viel Quadratschuhen?

4) Ein Kopfstück wiegt 0,2222 baiersche Loth; wie viele Kopfstücke gehen auf das baiersche Pfund?

V.

Anwendung der Würdenlehre auf die Logarithmen.

31. Es wird erklärt, was man verstehe
a) unter Logarithmen,
b) — ihren zugehörigen Zahlen,
c) — der Grundlage der Logarithmen,
d) — den verschiednen Gattungen oder Systemen derselben.

32. Der Briggischen Logarithmen
a) Erklärung,
b) Eigenschaften,

c) Schreibart,
d) Theile.

33. Erweisung folgender Sätze:

1) Der Logarithm eines Produkts ist die Summe der Logarithmen von den Faktoren.
$$L(ab) = La + Lb.$$

2) Der Logarithm eines Quotienten oder Bruches ist gleich dem Unterschiede, welcher entsteht, wenn vom Logarithm des Dividends (Theillings) der des Divisors (Theilers) abgezogen wird.
$$L\left(\frac{a}{b}\right) = La - Lb.$$

3) Der Logarithm einer Würde ist das Produkt aus dem Logarithm der Urgröße in den Exponenten der Würde. $L(a^m) = m.La.$

4) Der Logarithm einer Wurzel ist der Quotient, der heraus kömmt, wenn man den Logarithm der Urgröße durch den Wurzelexponenten theilt;
$$L\left(\sqrt[m]{a}\right) = \frac{La}{m}$$

34. Dazu gehört auch nachstehendes Paar Sätze:

1) Eigentliche Brüche haben verneinte Logarithmen.
$$L\left(\frac{n}{N}\right) = -r.$$

2) Decimalen haben die nämlichen Logarithmen, die sie als ganze Zahlen ohne Beystrich haben würden; nur müssen dem Kennziffer so viele Einheiten genommen werden, als viele Decimalziffer nach dem Beystriche stehen.
$$L\left(a \times 10^{-m}\right) = La - m.$$

35. Anwendung dieser Sätze auf die Fragen:

a) Wie werden für gemischte Zahlen ihre Logarithmen gefunden? z. B. L 23 $\frac{4}{5}$.

b) Wie werden für Decimalzahlen die Logarithmen bestimmt? z. B. L 32,678, oder L 0,087.

c) Wie werden für solche Logarithmen die entsprechenden Zahlen gefunden, welche ein verneintes Kennziffer und eine bejahte Mantisse (Zugabe) haben? z. B. 0.3628941 — 2.

d) Wie muß man zu Werke gehen, wenn auch die gemeinen Brüche (die eigentlichen Brüche versteht sich's) solche Logarithmen bekommen sollen, daß ihre Kennziffer verneint, und die Mantissen bejaht ausfallen? z. B. L $\frac{1}{8}$, L $\frac{3}{29}$.

36. Die Logarithmen sind für den Mathematiker nicht bloß zuträglich, sondern in manchen Fällen auch unentbehrlich.

* Beysp. 1) Welche Wurzel muß aus der Zahl 5764801 gezogen werden, damit man 7 erhält?

2) Zu einem Kapital, das 15000 fl. groß ist, und zu 3 $\frac{1}{2}$ Procent aufliegt, werden die Interessen jedes Jahr dazu geworfen, um künftig ebenfalls auch verzinset werden zu können. Wie lange muß es liegen bleiben, daß es zu 20000 fl. anwächst?

VI.

Vom sogenannten binomischen Lehrsatze.

37. Für die Erhebung einer zweytheiligen Größe zu was immer für einer Würde giebt die Induktion (Aufzählung) Regeln an die Hand in Hinsicht

a) der Exponenten des ersten Theils,

b) der Exponenten des zweyten Theils,

c) der Koefficienten, die den Gliedern der Würde zugehören.

* Beyspiele. $(a+b)^7$ und $(x+y)^n$

38. Die nämlichen Regeln dehnen sich auch aus

a) auf die Ausziehung der Wurzel aus zweytheiligen Größen. z. B. $\sqrt{(a+b)}$;

b) auf die Erhebung mehrtheiliger Größen zu irgend einer Würde. z. B. $(a+2b-f)^3$.

39. Es giebt auch ferners ein sehr leichtes Verfahren, jede mehrtheilige Größe zum Quadrat zu erheben. z. B. $(3m-2p+x^2-y)^2$.

VII.

Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf das Wurzelausziehen in Zahlen.

40. Aus Zahlen werden meistentheils nur zweyerley Wurzeln förmlich ausgezogen, nämlich

a) die Quadratwurzel, wozu die Formel dient:

$a^2+2ab+b^2$;

b) die Kubikwurzel mittels einer ähnlichen Formel.

41. Es ergiebt sich theils aus dem Begriffe der Wurzel, theils aus obigen Formeln, wie beyderley Wurzeln

1) aus gemeinen,

2) aus zehentheiligen Brüchen zu ziehen sey.

3) Wie man diese Wurzeln in Fällen durch Annäherung bestimmen müße.

42. Der quadratischen sowohl als kubischen Gleichungen
a) Begriff,
b) Eintheilung.

* Beyspiele zu reinen Gleichungen. 1) Am Hochzeittage eines Wittwers war dessen Sohn um 5 Jahre älter, als die angehende Stiefmutter, und die Tochter um 5 Jahre jünger, als dieselbe. Wenn aber Sohn und Tochter ihr Alter mit einander multipliciren, erhalten sie zum Produkt 336; wie alt ist jedes von diesen dreyen?

2) Wenn man die Hälfte, den achten und sechzehnten Theil jener Jahreszahl, als man die erste Chokolade in Deutschland trank, durch einander multipliciret, kömmt 13718000 zum Vorschein. Wann war dieß?

43. Der unreinen quadratischen Gleichungen
a) allgemeine Form.
b) Regel, selbe zu behandeln.

* Beyspiel. Einer von zweyen Bauern, die mit einander 24 Schäffel angebauet hatten, sagte zu dem andern: Wenn ich von jedem Schäffel meines Samens so viel ärnten könnte, als du ausgesäet, so würde ich 135 Schäffel bekommen. Wie viel hat jeder ausgesäet?

VIII.

Weitere Ausführung der geometrischen Proportionslehre, nebst den Reihen.

44. Von der geometrischen Proportion sind hier noch folgende Sätze nachzuholen:

1) Die Summe oder der Unterschied der zwey ersten Glieder verhält sich zu einem dieser beyden Glieder, wie die Summe oder der Unterschied der zwey letztern zu einem gleichnamigen Gliede dieser letztern.

2) Man kann ohne Verletzung der Proportion entweder das erste und zweyte, oder das dritte und vierte, oder das zweyte und vierte, oder endlich alle vier Glieder durch ein und die nämliche Größe fältigen oder theilen.

3) Es bleibt auch noch die Proportion, wenn alle vier Glieder zu einerley Würde erhoben, oder wenn aus allen vier Gliedern einerley Wurzel gezogen wird.

45. Es können sich zwey Größen verhalten

1) wie die Produkte aus andern Größen;
2) umgekehrt wie zwey andere Größen;
3) theils umgekehrt, theils gerade.

46. Der Reihen (Progressionen)

a) Begriff,
b) Abtheilung,
c) allgemeine Darstellungsform.

47. Das letzte Glied in einer abgebrochenen Reihe läßt sich allemal in arithmetischen Fällen durch

$$u = a + d(n - 1)$$

und in geometrischen Fällen durch

$$u = a q^{n-1}$$ bestimmen.

48. Aus dem Hauptgesetze der arithmetischen Reihe, daß die Summe des ersten und letzten Gliedes gleich sey der Summe zweyer andern Glieder, die vom ersten und letzten gleich weit abstehen, läßt sich die Formel erweisen:

$$S = (a + u)\frac{n}{2}.$$

49. Aus dem Hauptgesetze der geometrischen Reihe, daß sich die Summe aller Glieder weniger dem letzten zur Summe aller Glieder weniger dem ersten verhält wie das erste zum zweyten, ist erweislich, daß

$$S = \frac{qu - a}{q - 1} \text{ sey.}$$

50. Durch algebraische Versetzungen, Substitutionen, oder Zusammenstellungen lassen sich eine Menge Formeln für beyde Gattungen der Reihen gewinnen.

* Anwendung. Bey einer Beleuchtung wird eine Flächenpyramide mit Lampen so besetzt, daß zu oberst eine, in der nächsten Linie 2, dann 3, 4, u. s. f.; in der untersten Linie aber 75 Lampen brannten; wie viele Lampen waren es in allem?

Sätze
aus
der Elementargeometrie und ebnen Trigonometrie.

Seinen Schülern
zur Prüfung vorgelegt
vom
Professor Prändel.

München, bey Joseph Lentner, 1804.

I.
Einleitung.

1. Nachdem erkläret worden,
   a) Was man unter Geometrie überhaupt verstehe;
   b) Wie vielerley Gegenstände sie habe, und wie sie gewöhnlich heißen;
   c) Welcher Unterschied zwischen mathematischen und physischen Körpern, Flächen, Linien und Punkten sey;
   d) Wie die Linien abgetheilet, gemessen, und die Maaße bezeichnet werden:

dann läßt sich eine bestimmte Gränzlinie zwischen Elementargeometrie und höherer Geometrie ziehen.

* Ursache, warum auch der Kreis zur Elementargeometrie gerechnet werde.

** Kurze Geschichte und litterarische Quellen dieser Wissenschaft.

II.

Kreis und Winkel.

2. Erklärung

a) des Kreises,

b) seiner Theile, als

1) des Strahls, (Radii)

2) Mittelpunkts, (Centri)

3) Umfangs, (Peripheriae)

4) eines Bogens, (Arcus)

5) einer Sehne, (Chordae)

6) des Durchmessers, (Diametri) und Halbmessers, (Semidiametri)

7) eines Abschnitts, (Segmenti)

8) eines Ausschnitts, (Sectoris).

3. Der Grade

a) Erklärung,

b) Unterabtheilung,

c) Bezeichnung.

* Warum haben die Alten die Zahl 360 gewählt?

4. Es wird gesagt,

a) Was man unter Winkel allgemein verstehe, und wie sie gebildet werden;

b) Was dabey Scheitelpunkt, was Schenkel heiße;

c) Wann die Winkel klein, wann groß genennt werden;

d) Ob die Länge der Schenkel etwas zur Größe des Winkels beytragen könne, und warum;

e) Wie man die Winkel in Rücksicht ihrer Entstehung eintheile.

5. Nachdem dargethan worden, daß sich die Winkel am natürlichsten durch Kreisbögen messen lassen, die aus dem Scheitelpunkte zwischen den Schenkeln beschrieben worden, so kann man die Winkel auch noch eintheilen

a) in hohle, und erhabne;
b) die hohlen mehrmals
1) in rechte,
2) in spitzige, und
3) in stumpfe;

woraus sich ergiebt, was Senklinie, oder Lothe (Perpendiculum) heiße.

* Als was kann jede gerade Linie angesehen werden?

6. Gelegenheitlich läßt sich hier auch sagen,

a) Wie Winkel auf dem Papiere praktisch gemessen werden;
b) Wie man sie in der Theorie zu bezeichnen pflege.

7. Lehrsätze:

1) Zwey Nebenwinkel halten mit einander 180°.
2) Ist einer von zweyen Nebenwinkeln spitzig, so ist der andere stumpf, und wechselweise.
3) Haben zwey Nebenwinkel gleiche Größe, so ist jeder ein rechter.
4) Zwey und zwey zusammen gehörige Scheitelwinkel sind einander gleich.

* Wenn von zweyen Nebenwinkeln, oder von vier Scheitelwinkeln einer bekannt ist, so sind auch die übrigen bekannt.

III.

Flächenfiguren.

8. Der Flächenfiguren
   a) Begriff,
   b) Eintheilung,
   c) Benennung.

* Warum sind Einecke und Zweyecke als Figuren Undinge?

9. Eintheilung und Verzeichnung
   a) der Dreyecke,
   b) der Vierecke,
   c) der Vielecke.

IV.

Kongruenz der Dreyecke.

10. Der Kongruenz (Uebereintreffung)
    a) Begriff,
    b) Bezeichnung.

11. Zwey Dreyecke sind kongruent,
    1) wenn zwey Seiten und der Zwischenwinkel, oder
    2) wenn eine Seite und die angränzenden Winkel, oder
    3) wenn alle drey Seiten überall die nämlichen Stücke sind.

12. In kongruenten Dreyecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; oder gleiche Winkel haben gleiche Gegenseiten.

13. Aufgaben:

1) Einen Winkel, und
2) eine Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.
3) Auf eine Linie eine Lothe zu errichten, der Punkt mag in der Linie, oder über derselben gegeben seyn.

14. Gelegenheitlich können hier auch die zwey Sätze erwiesen werden:

1) In gleichschenklichten Dreyecken haben die Winkel an der Grundlinie gleiche Größe.
2) Gleichseitige Dreyecke haben lauter gleiche Winkel.

V.

Vom Parallelism der Linien.

15. Werden zwey Linien, die sich einerseits einander nähern, folglich andrerseits sich von einander entfernen, durch eine dritte Linie wie immer durchschnitten, so stehet zu erweisen,

1) Daß die zwey innern Winkel auf der Seite, wo sich die Linien einander nähern, weniger als 180° halten.
2) Daß hingegen die zwey innern Winkel auf jener Seite, wo sich die Linien von einander entfernen, um eben so viel mehr als 180° betragen.

16. Bey parallelen (gleichlaufenden) Linien halten

1) Die innern Winkel auf jeder Seite genau 180°.
2) Die Wechselwinkel sind einander gleich.
3) Jeder äußere Winkel ist so groß, als sein innerer entgegengesetzter.

17. Aus dem Parallelism lassen sich folgende Sätze erweisen:

1) Parallellinien, die zwischen zwey andern Parallellinien liegen, haben gleiche Länge.

2) Wenn in einem Vierecke je zwey und zwey Gegenseiten einander gleich sind, so sind sie auch nothwendig mit einander parallel. Daher ihre Benennung.

3) Alle Lothen zwischen zwey Parallellinien sind unter sich gleich.

4) Wenn sich in einem Parallelogram ein rechter Winkel befindet, so ist jeder Winkel in demselben ein rechter.

5) Alle Winkel in einem Dreyecke halten zusammen 180°.

* Ein Dreyeck mit zwey oder drey rechten Winkeln, oder mit eben so viel stumpfen, ist ein Unding.

18. An obige Sätze schließen sich auch folgende an:

1) In jedem Dreyecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

2) Wenn außerhalb einer geraden Linie ein Punkt gegeben wird, so ist die Lothe, welche von diesem Punkt auf die Linie hingefällt wird, allemal der kürzeste Abstand des Punkts von der Linie.

3) Jeder Halbmesser steht auf seiner Tangente senkrecht.

4) In gleichseitigen Dreyecken mißt jeder Winkel 60°.

5) In gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyecken mißt ein Winkel an der Grundlinie 45°.

6) Die Winkel eines Vierecks halten mit einander 360°.

7) Die Winkel eines Vielecks überhaupt $180(n-2)$.

8) Verlängert man eine Dreyecksseite, so hält der dadurch entstandene äußere Winkel eben so viele Grade als die beyden gegenüber liegenden Winkel im Dreyecke zusammengenommen.

* In gleichschenklichten Dreyecken lassen sich alle Winkel bestimmen, wenn einer gegeben ist.

VI.

Peripherialwinkel.

19. Weiß man, was unter Winkel am Umkreise (Peripherialwinkel) verstanden wird, so sind auch folgende Behauptungen erweislich:

1) Jeder Peripherialwinkel hat zum Maaße den halben Bogen, der zwischen den Sehnen liegt, die jenen bilden.
2) Reichen die Schenkel eines solchen Winkels an die Endpunkte eines Durchmessers hin, so hält derselbe 90°.
3) Schneiden sich zwey Sehnen innerhalb des Kreises, so ist das Maaß eines solchen Winkels, wo der Schnitt geschieht, die halbe Summe der zwey Bögen, die zwischen den Schenkeln der zusammen gehörigen Scheitelwinkel liegen.
4) Schneiden sie sich aber außerhalb, dann ist das Maaß die halbe Differenz der Bögen, die zwischen den Sehnen liegen.
5) Zwey einander entgegenstehende Winkel eines Vierecks im Kreise halten mit einander 180°.
6) Ein Winkel, den Tangente und Sehne mit einander bilden, hat gleichfalls die Hälfte des dazwischen liegenden Bogens zum Maaße.

* Benützung des ersten Satzes bey Anlegung der Schauspielhäuser.

20. Aufgaben,

1) Winkelhacken zu prüfen;
2) Eine Lothe auf den Endpunkt einer Linie zu errichten.

VII. Figuren.

VII.

Figurenwandlung.

21. Nachdem gesagt worden,

a) Was man unter Figurenwandlung verstehe;

b) Was die Höhe eines Parallelograms (gleichlaufenden Vierecks), und

c) die eines Dreyecks

sey, trifft die Reihe folgende Sätze:

1) Jedes Parallelogram wird von einer Diagonal (Querlinie) in zwey gleiche und ähnliche Dreyecke zerlegt.

2) Zwey Parallelogrames von einerley Grundlinie und Höhe haben gleichen Flächeninhalt.

3) Eben so auch zwey Dreyecke von einerley Grundlinie und Höhe.

4) Jedes Parallelogram kann durch Konstruktion (Verzeichnung) in ein anders von gegebener Höhe oder Grundlinie verwandelt werden.

5) Auch Dreyecke lassen sich auf besagte Weise in Parallelograme oder in andere Dreyecke verwandeln.

6) Zwey Quadrate können so addirt werden, daß die Summe wieder ein Quadrat giebt, oder, wie sonst dieser Satz vorgetragen wird: Das Quadrat der größten Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes (d. i. der Hypothenuse) ist gleich der Summe der Quadrate der übrigen zwey Seiten (nämlich der beyden Lothen).

* Anwendung. Eine Stadtmauer ist 42 Schuhe hoch, u. der darin liegende Wassergraben 18 Schuhe breit; wie lang müßen die Sturmleitern seyn, wenn sie diesseits des Grabens angelehnt werden sollen?

VIII.

Figurenberechnung.

22. Begriff

a) Vom Flächenmaaße überhaupt, und dessen Eintheilung;

b) Vom Flächeninhalt einer Figur.

23. Gewöhnliche Berechnung des Flächeninhalts

a) des Parallelograms; $q = b\ p$.

b) des Quadrats, $q = l^2$.

c) des Dreyecks, $q = \frac{b\ p}{2}$.

d) des Trapezes, $q = (\pi + \Pi)\ \frac{w}{2}$.

e) des Trapezoids und Vielecks,
$q = \Delta + \mathfrak{D} + D + d + \ldots$

IX.

Verschiedene Verhältniße, die in geradlinichten Figuren Statt haben.

24. Die Flächeninbegriffe zweyer Dreyecke verhalten sich

1) wie ihre Grundlinien, wenn sie einerley Höhe haben;

2) wie ihre Höhen, wenn sie einerley Grundlinie haben.

25. Wenn man ein Dreyeck mit einer der drey Seiten parallel durchschneidet, dann verhalten sich geometrisch

a) die Abschnitte der Seiten unter sich;

b) die obern Abschnitte zu den ganzen Seiten;

c) die untern Abschnitte zu den ganzen Seiten;

d) die Schnittlinie zur Grundlinie, wie ein oberer Abschnitt zu seiner ganzen Seite.

26. Daraus läßt sich unter andern erweisen, daß, wenn in einem Dreyecke irgend ein Winkel in zwey Hälften getheilet, und die Theilungslinie bis zur Gegenseite verlängert wird, die Abschnitte dieser Seite mit den anliegenden Schenkeln des getheilten Winkels im geraden Verhältniße stehen.

27. Nach festgesetzten Begriffen von der Aehnlichkeit der Dreyecke kann der Hauptlehrsatz aufgestellt werden: In ähnlichen Dreyecken stehen jene Seiten im Verhältniße, deren Gegenwinkel gleich sind.

* Verschiedener Vortrag dieses Satzes.

28. Daraus fließen folgende Behauptungen:

1) In ähnlichen Dreyecken stehen auch die Höhen mit den Grundlinien im Verhältniße.
2) Die Flächen zweyer ähnlichen Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender oder gleichnamiger (homologer) Seiten.
3) Auch in ähnlichen Vielecken stehen gleich liegende Linien in Proportion, und
4) ihre Flächen verhalten sich wie die Quadrate bemeldter Linien.

* Beyspiel. Ein Forstplan beträgt 8 Quadratschuhe. Eine Linie, die im Forst selbst 560 Schuhe mißt, hält hier 2 Zoll, oder $\frac{1}{6}$ Schuh; wieviele Tagwerke hat dieser Forst?

X. Anwen-

X.

Anwendung der Algebra auf die Berechnung u. Verwandlung der Flächenfiguren.

29. Aus den drey gegebenen Seiten eines Dreyecks läßt sich der Inhalt, weit genauer als oben, durch die Formel bestimmen:
$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}$

30. Diese Formel ändert sich

a) für das gleichschenklichte Dreyeck in folgende um:
$\Delta = \frac{1}{4} b \sqrt{4c^2 - b^2}$, und

b) für das gleichseitige Dreyeck in diese:
$\Delta = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$, oder $= l^2 . 0{,}433 \ldots$

* Anwend. Die Insel Delta in Aegypten ist ein gleichschenklichtes Dreyeck. Die Grundlinie, oder die dem Meere zugekehrte Seite hält 40 deutsche Meilen, und ein jeder Schenkel 23; wie groß ist der Flächeninhalt dieser Insel?

31. Es kann auch durch obige Formel in aller Strenge erwiesen werden:

1) daß drey Seiten, wovon zwey zusammen so groß als die dritte sind, keine Fläche einschließen;
2) daß ein Dreyeck, wovon irgend zwey Seiten zusammen genommen kleiner als die dritte sind, platterdings unmöglich sey.

32. Jede geradlinichte Figur läßt sich durch Rechnung in eine andere verwandeln; so z. B. ist die Seite eines Quadrats, das so

groß als ein Dreyeck von bekannten Seiten werden soll, durch die Formel gegeben:

$$l = \frac{1}{2} \sqrt[4]{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

33. Dreyecke können nach Gefallen mit einer Seite parallel in etliche gleiche Theile zerlegt werden. Der Abschnitt des Perpendikels von der Spitze aus für das erste Stück ist

$$x = \frac{p}{\sqrt{n}}, \text{ oder } = p\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

für das zweyte $X = p\sqrt{\frac{2}{n}}$ u. s. w.

XI.

Nähere Betrachtungen über den Kreis.

34. Im nämlichen Kreise haben gleiche Sehnen gleiche Bögen, und wechselweise.

35. Jede Linie, die irgend eine Sehne rechtwinklicht halbirt, wird mittels gehöriger Verlängerung zum Durchmesser.

36. Aufgabe. Durch drey gegebene Punkte, die in keiner geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

37. Wenn sich zwey Sehnen irgendwo schneiden, so erhält man allemal gleiche Produkte oder Rechtecke, und zwar

a) innerhalb des Kreises, aus den zusammengehörigen Stücken der Sehnen;

b) außerhalb, aus den verlängerten Sehnen in die Verlängerungsstücke.

38. Das Quadrat jeder Lothe zwischen Kreisbögen und Durchmesser ist so groß als das Produkt oder Rechteck aus den Abschnitten des Durchmessers.

39. Da in jedem regelmäßigen Vielecke zweyerley Winkel, nämlich Zentriwinkel und Polygonwinkel vorkommen können, so lieget dem Meßkünstler daran, ihre Größe allgemein zu bestimmen. Es ist aber

1) $c = \frac{360}{n}$.

2) $p = 180 - \frac{360}{n}$ oder $= \frac{180(n-2)}{n}$.

40. Im regelmäßigen Sechsecke giebt der Halbmesser jenes Kreises, in welchen es hineinbeschrieben werden soll, die Seite ab.

41. Die Sehne eines halben Bogens ist größer als die halbe Sehne des ganzen Bogens.

a) Anwendung dieses Satzes auf Vielecke.

b) Uebergang vom Vielecke auf den Kreis.

c) Neue Vorstellungsart des Kreises.

42. Die Sehne eines solchen halben Bogens kann bestimmt werden; denn heißt dieselbe $= c$, die Sehne des ganzen Bogens $= C$, und der Halbmesser $= r$; so ist

$$c = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C^2}{4r^2}}}.$$

oder

$$c = \tfrac{1}{2} d\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{C}{d}\right)^2}}.$$

43. Anwendung dieses Satzes

a) auf Beschreibung der Quadrate im Kreise, besonders aber

b) auf die Bestimmung des Umfangs eines Kreises, dessen Durchmesser = 1 gesetzt wird, nebst dem endlichen Resultate, und der Bezeichnung desselben.

44. Zur Berechnung des Kreises gehören folgende Formeln:

1) $p = d\pi$, oder $= 2r\pi$.

2. $q = r^2\pi$, oder $= \frac{d^2\pi}{4}$, oder auch $= \frac{p^2}{4\pi}$.

45. Daraus lassen sich unmittelbar ableiten

1) $d = \frac{p}{\pi}$, oder $= 2\sqrt{\frac{q}{\pi}}$.

2) $p = 2\sqrt{\pi q}$.

46. Ueberhaupt verhalten sich die Flächen zweyer Kreise wie die Quadrate der Halbmesser oder der Durchmesser, oder der Umfänge, d. i. $q : Q = r^2 : R^2$, oder $= d^2 : D^2$, oder auch $= p^2 : P^2$.

* Anwendung. Ein Kirchenrundel hält im Durchmesser 72 Schuhe; wie lang muß die Dachrinne werden, die sie umgiebt.

XII.

Stereometrie, oder Körpermessung.

47. Nach vorläufiger Eintheilung der Körper wird erklärt

1) das Prisma, (Kantsäule oder Ecksäule)
2) das Parallelepipedum, (körperlicher Gleichlauf)
3) der Kubus, (Würfel)
4) der Zylinder, (Walze)
5) die Pyramide, (kantige Spitzsäule)
6) der Kegel.

48. Des körperlichen Winkels
a) Begriff,
b) Maaß.

49. Nachdem gesagt worden, was man überhaupt unter regulären (regelmäßigen) Körpervielecken verstehe, und wie viel man deren zähle; können auch die Winkel bestimmt werden:
a) beym Tetraedrum, (Vierständer)
b) — Hexaedrum, (Sechsständer, u. s. w.)
c) — Oktoedrum,
d) — Ikosaedrum,
e) — Dodekaedrum.

50. Der Kugel
a) abgeleitete, und
b) genetische (ursprüngliche) Erklärung.

51. Zwey Prismen von einerley Grundfläche und Höhe haben gleichen Rauminhalt.

52. Auch zwey Pyramiden von obiger Eigenschaft sind dem körperlichen Inhalte nach gleich.

53. Jede dreyeckichte Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

54. Ausdehnung dieses Satzes auf mehreckichte Pyramiden und Prismen; so wie auch auf Walzen und Kegel.

55. Der Rauminhalt eines Prisma oder Walze wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe faltigt: $k = Bh$.

56. Bey der Pyramyde und beym Kegel muß dieses Produkt durch 3 getheilt werden: $k = \frac{Bh}{3}$.

57. Besser läßt sich der Inhalt der Walze ausdrücken durch $z = \frac{d^2 h \pi}{4}$, und der des Kegels $c = \frac{d^2 h \pi}{12}$.

58. Zur Bestimmung eines Kegelrumpfes von zweyen parallelen Grundflächen dient die Formel: $\mathfrak{R} = \frac{h \pi (D^2 + dD + d^2)}{12}$.

59. Man mag hier $d = 0$ oder $d = D$ setzen, so erfolgt jederzeit die gehörige Antwort.

60. Obige Formel kann angewendet werden

a) auf die Verwandlung eines Baumes in Klafterholz, wo sie sich in diese ummodelt:

$$N = \frac{l(D^2 + dD + d^2)}{46200},$$

und logarithmisch

$$LN = L(D^2 + dD + d^2) + Ll - 4.6646731;$$ oder

b) auf die Visirung der Weinfäßer, wo

$$N = \frac{l(D^2 + dD + d^2)}{18164,44\ldots},$$

und logarithmisch

$$LN = L(D^2 + dD + d^2) + Ll - 4.2592235.$$

61. Der Rauminhalt regelmäßiger Vielecke ist das Produkt aus der Oberfläche in den dritten Theil der Höhe:

$$\mathfrak{V} = \frac{h\mathfrak{O}}{3}.$$

62. Die Kugel ist der sechste Theil des Produkts aus der Oberfläche in den Durchmesser: $c = \frac{sd}{6}$.

63. Die Oberfläche jeder Kugel läßt sich durch eine der Formeln finden: $s = d^2\pi$, oder $= 4r^2\pi$, oder $= \frac{p^2}{\pi}$.

64. Zur Berechnung des kubischen Inhalts einer Kugel dienen nachstehende Formeln: $c = \frac{d^3\pi}{6}$, oder $= \frac{4r^3\pi}{3}$, oder $= \frac{p^3}{6\pi^2}$.

65. Daraus lassen sich ableiten folgende sehr brauchbare Ausdrücke:

1) $d = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$, oder $= \sqrt[3]{\frac{6c}{\pi}}$.

2) $p = \sqrt[3]{6c\pi^2}$, oder $= \sqrt{s\pi}$.

3) $c = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{s^3}{\pi}}$.

66. Die körperlichen Räume zweyer Kugeln stehen im Verhältniße mit den Würfeln ihrer Halbmesser oder Durchmesser, oder auch ihrer Peripherien:

$$c : C = r^3 : R^3$$
$$= d^3 : D^3$$
$$= p^3 : P^3.$$

* Anwend. Eine dreypfündige Kanonkugel von Eisen hat einen Kaliber von 2,747 rheinischen Zollen; welchen Kaliber wird eine 24pfündige Eisenkugel haben?

97. Jeder geometrische Körper kann in einen andern verwandelt werden; so ist z. B. die Seite eines Würfels, der gleichen Inhalt mit einer Kugel von gegebenem Durchmesser halten soll,

$$x = d\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}, \text{ oder } = d \,.\, 0{,}806\ldots;$$

logarithmisch: $L\,x = L\,d + 0 \,.\, 9063329 - 1$.

XIII.

Ebne Trigonometrie.

68. Der ebnen Trigonometrie
    a) Begriff,
    b) Einschränkung.

69. Der hieher gehörigen Hilfslinien
    a) Aufzählung,
    b) Erklärung.

70. Die Zeichnung des Sinuses eines Winkels oder Bogens bringt auch allemal einen Werth des Kosinus zugleich hervor.

71. Zwey Nebenwinkel haben einerley Sinuse.

72. Aus der Betrachtung des Wachsens und Abnehmens, des bejahten und verneinten Zustandes der hauptsächlichen trigonometrischen Linien durch die vier Quadranten des Kreises geht hervor, daß, wenn der Halbmesser = 1 gesetzt wird,

a) $\sin. 0° = 0$	$\cos. 0° = 1$	$\text{tang.} 0° = 0$
b) $\sin. 90° = 1$	$\cos. 90° = 0$	$\text{tang.} 90° = \infty$
c) $\sin. 180° = 0$	$\cos. 180° = -1$	$\text{tang.} 180° = 0$
d) $\sin. 270° = -1$	$\cos. 270° = 0$	$\text{tang.} 270° = -\infty$
e) $\sin. 360° = 0$	$\cos. 360° = 1$	$\text{tang.} 360° = 0$ sey.

73. Jede halbe Sehne ist der Sinus des halben Bogens; oder umgekehrt, jeder Sinus ist die Hälfte einer Sehne, die entsteht, wenn der Sinus bis zum Umfange des Kreises verlängert wird.

74. Rational (völlig bestimbar) sind
    a) aus den Sinusen der von 90°, und der von 30°;
    b) aus den Tangenten, die von 45°.

75. Der Kosinus läßt sich aus dem Sinus, und wechselweise dieser aus jenem bestimmen; denn

1) $\text{cos}.\ \phi = \sqrt{1 - \text{sin}.^2 \phi}$,

2) $\text{sin}.\ \phi = \sqrt{1 - \text{cos}.^2 \phi}$.

76. Die Tangente ist gegeben durch Sinus und Kosinus zugleich; deßgleichen auch die Kotangente.

1) $\text{tang}.\ \phi = \frac{\text{sin}.\ \phi}{\text{cos}.\ \phi}$;

2) $\text{cot}.\ \phi = \frac{\text{cos}.\ \phi}{\text{sin}.\ \phi}$.

* Wichtige Folgerung aus der erstern Formel für die Rechnung des Unendlichen.

77. In jedem Dreyecke stehen die Seiten mit den Sinusen ihrer Gegenwinkel im Verhältniß. $a : b = \text{sin}.\ A : \text{sin}.\ B$.

78. Wird der Winkel am Scheitel eines gleichschenklichten Dreyecks durch v, die Grundlinie durch b, und ein Schenkel durch c bezeichnet, so kann behauptet werden, daß

1) $b = 2c\ \text{sin}.\ \frac{1}{2} v$,

2) $b = \frac{c\ \text{sin}.\ v}{\text{cos}.\ \frac{1}{2} v}$ sey.

79. Davon stammen die zwey sehr brauchbaren Sätze ab:

1) $\text{sin}.\ \phi = 2\ \text{sin}.\ \frac{1}{2} \phi \,.\ \text{cos}.\ \frac{1}{2} \phi$;

2) $\text{sin}.\ 2 \psi = 2\ \text{sin}.\ \psi\ \text{cos}.\ \psi$.

80. Es läßt sich ferner erweisen, daß $\text{sin}.\ \frac{1}{2} \phi = \sqrt{\frac{1 - \text{cos}.\ \phi}{2}}$ sey.

81. Drückt man die Höhe (perpendiculum) eines gleichschenklichten Dreyeckes durch p aus, so kann dieselbe auf zweyfache Weise bestimmt werden, nämlich

a) $p = c \cos. \frac{1}{2} v$.

b) $p = \frac{b}{2 \tan g. \frac{1}{2} v}$.

* Anwendung. Der Lichtstrahl des untern Sonnenrandes machet mit dem Lichtstrahle des obern Sonnenrandes zur Zeit der Erdferne in dem Auge des Beobachters einen Winkel von 31′ 32″; wie groß ist der scheinbare Durchmesser der Sonne, wenn die größte Entfernung 24266 Halbmesser der Erde beträgt?

82. Durch obige Formeln wird man in Stand gesetzt, den Inhalt eines gleichschenklichten Dreyecks trigonometrisch zu bestimmen; denn

a) $q = \frac{c^2 \sin. v}{2}$, oder

b) $q = \frac{b^2}{4 \tan g. \frac{1}{2} v}$, oder $= \frac{1}{4} b^2 \cot ang. \frac{1}{2} v$.

83. In jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich aus dem Durchmesser des Kreises, und aus der Anzahl der Seiten der Ummesser trigonometrisch berechnen; denn es ist $U = n d \sin. \frac{180}{n}$.

84. Setzt man in dieser Formel den Durchmesser $= 1$, und nimmt sehr viele Seiten an, etwa so viele, als Minuten, oder gar Sekunden im Umkreise sind, so erhält man die ludolphische Zahl in fünf bis sechs Decimalen $\pi = 3{,}14159\ldots$

85. Es mag nebst der Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vieleckes die Seite selbst, oder der Durchmesser des umschriebnen Kreises gegeben seyn, so läßt sich allemal der Inhalt desselben trigonometrisch bestimmen. Es ist nämlich

1) $\mathfrak{V} = \frac{n\, l^2}{4 \text{ tang. } \frac{180^\circ}{n}}$, oder $= \frac{1}{4} n\, l^2 \text{ cotang. } \frac{180^\circ}{n}$.

2) $\mathfrak{V} = \frac{1}{8} n\, d^2 \text{ sin. } \frac{360^\circ}{n}$.

86. Aus diesen beyden Formeln fließen folgende Sätze:

1) Der Kreis ist im strengsten Sinne ein Unendlicheck (απειρογονον).

2) Von keinem Vielecke ist der Inhalt völlig bestimmbar (rational), als vom Quadrat und vom Zwölfecke.

3) Der Inhalt eines gleichseitigen Dreyecks ist $= \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$, oder $= \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$.

4) Der Inhalt des Sechseckes ist $= \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$. Also ist dasselbe auch dem Inhalte nach noch einmal so groß, als das gleichseitige Dreyeck im nämlichen Kreise, d. i. $\mathfrak{S} = 2\, \mathfrak{D}$.

5) Ein Zweyeck schließt keinen Raum in sich; und ist demnach eine leere Idee.

87. Die Regel, aus zweyen Seiten eines Dreyeckes und dem Zwischenwinkel die dritte Seite zu berechnen, liegt nach gehöriger Bezeichnung der Figur in folgender Formel:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\, a\, b \text{ cos. } C}.$$

88. Es kann bestimmt werden,

a) Wie sich dieser Ausdruck ändert, wenn eine andere Seite mittels des gegebenen Gegenwinkels gesucht werden soll;

b) Welche Fälle hervorgehen, wenn

1) der Zwischenwinkel als unendlich klein oder verschwindend, d. i. = 0 anzusehen ist;

2) wenn er 90° hält;

3) wenn er ein stumpfer Winkel ist;

4) wenn er bis zu 180° anwächst.

* Anwendung. Eine Hochstrasse macht irgend einen Winkel von 110°. Der eine Schenkel hält 540, und der andere 860 Schuhe. Wie viel Weg darf der weniger zurück legen, der diesen Winkel abschneidet?

89. Um aus den drey gegebenen Seiten eines Dreyeckes die Winkel zu bestimmen, dient der Satz;

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

der sich leicht für einen andern Winkel modificiren läßt.

90. Aus obigem analytischem Ausdruck kann gefolgert werden:

1) Wie groß die Winkel im gleichseitigen Dreyecke sind;

2) Wie sich die Regel oder Formel für gleichschenklichte Dreyecke abändert, sowohl in Rücksicht des Winkels am Scheitel, als der beyden an der Grundlinie;

3) Ob ein Dreyeck gedenkbar sey, wo

a) zwey Seiten so groß als die dritte;

b) zwey Seiten kleiner als die dritte sind.

* Anwendung. Welche Winkel bildet die Insel Delta? — Die Data hiezu stehen oben (Seite 11) nach dem 29. Satze.

91. Von den trigonometrischen Linien der Summen und der Differenzen zweyer Winkel oder Bögen lassen sich folgende sehr brauchbare Sätze erweisen:

1) $\sin. (a + b) = \sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a.$
2) $\sin. (a - b) = \sin. a \cos. b - \sin. b \cos. a.$
3) $\cos. (a + b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b.$
4) $\cos. (a - b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b.$

92. Daraus lassen sich unmittelbar ableiten

1) $\sin. 2 a = 2 \sin. a \cos. a.$

2) $\cos. 2 a = \cos.^2 a - \sin.^2 a.$

XIV.

Ausübende Meßkunde.

93. Nach vorausgehender Erörterung,

a) Was man unter Meßkunde verstehe;

b) Was ein Grundstück oder eine Gegend aufnehmen heiße:

werden die nöthigsten Geräthschaften eines Feldmessers

a) aufgezählt, und

b) ihr Gebrauch erkläret.

94. Eine Linie, die sich auf dem Felde nicht unmittelbar messen läßt, kann sowohl geometrisch als trigonometrisch bestimmt werden,

1) Wenn man außer derselben irgendwo einen Standpunkt antrifft, von wo aus es verstattet ist, zu beyden Endpunkten der Linie zu sehen, und zu messen.

2) Wenn von diesem Standpunkt aus zwar zu allen beyden Endpunkten der Linie gesehen, aber nur zu einem gemessen werden kann; z. B. die Breite eines Flußes zu bestimmen.

3) Wenn gar kein Endpunkt der Linie zugänglich ist, aber doch beyde aus zweyen Punkten einer andern meßbaren Linie gesehen werden können.

95. Die Art und Weise*, ein Grundstück in Plan zu bringen, ist anderst,

a) wenn dasselbe umgangen werden kann;

b) wenn es aus den Endpunkten irgend einer Mittellinie aufgenommen werden soll.

96. Langwieriger wird das Geschäft, wenn die Gränzlinien krumm oder äußerst vieleckicht sind.

97. Zugängliche Höhen lassen sich messen

a) mittels des Schatten,

b) mittels zweyer Stäbe,

c) mittels des Winkelmessers, und der einfachen Formel: $h = St. \tan. v + 5$.

98. Unzugängliche Höhen werden am zuverläßigsten mit dem Winkelmesser (Astrolabium) und der kleinen Formel behandelt:

$$h = \frac{St \sin. v \sin. V}{\sin. (V - v)} + 5.$$

* Was bedeutet das Ereigniß, wenn die Visierwinkel (Zielwinkel) einander gleich befunden werden?

Sätze
aus
der höhern Größenlehre.

Seinen Schülern
zur Prüfung vorgelegt
vom
Professor Prändel.

München, bey Joseph Lentner, 1804.

I.
Vorläufige Sätze.

1. Der höhern Mathematik
   a) Erklärung, und
   b) Abtheilung.
   * Geschichte und Litteratur.

2. Der hieher gehörigen Größen
   a) Eintheilung, und
   b) Bezeichnung.

3. Der Funktionen (Wechselgrößen)
   a) Begriff, und
   b) Abtheilung.

4. Nach festgesetzter Bestimmung, was man unter endlichen und unendlichen Größen verstehe, und wie man letztere

a) bezeichne,
b) abtheile, und
c) in Ordnungen unterabtheile;

wird der wichtige vierfache Satz zum Grunde gelegt:

Es erfolgt durchaus keine Aenderung

a) bey Unendlichkeiten überhaupt, wenn endliche Größen dazu oder hinweg kommen:
$\infty \pm x = \infty$;

b) bey Ordnungen der Unendlichkeiten, wenn niedrigere Ordnungen derselben hinzu oder hinweg kommen: $\infty^m \pm \infty^{m-n} = \infty^m$;

c) bey endlichen Größen, wenn unendliche Kleinigkeiten hinzu oder hinweg kommen:
$x \pm \frac{y}{\infty} = x$;

d) bey unendlichen Kleinigkeiten, wenn höhere Ordnungen derselben hinzu oder hinweg kommen:
$\frac{x}{\infty^m} \pm \frac{y}{\infty^{m+n}} = \frac{x}{\infty^m}$.

II.

Differentialrechnung.

5. Der Differentiale (Größenkeime)

a) Erklärung,
b) Bezeichnung, und
c) Versinnlichung durch Linien.

6. Die

6. Die Regeln, Größen zu differenziren, werden abgetheilt in die

a) der einfachen Größen: $d(x + a - z)$.

b) der Würden und Wurzeln: $d(x^m)$, $d(\sqrt[n]{y})$.

c) der Produkte:
$d(xy)$, $d(az)$, $d(xyz)$, $d(y^2 z^4)$.

d) der Brüche:
$d\left(\frac{x}{y}\right)$, $d\left(\frac{a}{z}\right)$, $d\left(\frac{x}{b}\right)$, $d\left(\frac{x^2}{z^3}\right)$.

* Zusammengesetzte Wurzelausdrücke werden am bequemsten durch Umformung (per transformationem) differenzirt, z. B. $d(\sqrt{ax - y^2 + xz})$.

7. Nach vorausgeschickter Erklärung, was man unter Größten und Kleinsten verstehe, lassen sich folgende Aufgaben lösen:

I Wo ist im Kreise die Lothe vom Umfange herab auf dem Durchmesser ein Größtes?

II. Wenn die Judenschaft einem Regenten für ihre Duldung 1000 Dukaten überhaupt, nebst noch von jedem Kopfe so viele Dukaten, als Köpfe geduldet werden, verspricht; und wenn hinwiederum der Fürst jedem Juden 20 Dukaten von diesem Anerbiethen erläßt: wie viele Juden dürfen sich ansiedlen, daß ihre Abgabe ein Kleinstes werde?

III. Bey einem Hausbau ist eine der drey Abmessungen (Dimensionen) gegeben; wie müßen sich die beyden andern gegen einander verhalten, daß die Oberfläche, oder was

eins ist, die Summe der Baumaterialien, so wie der Arbeitslohn oder die Dauer des Baues ein Kleinstes werde?

IV. Wie muß sich bey zylindrischen (walzenförmigen) Gefäßen, z. B. bey runden Schachteln, Flaschen, auch bey Fäßern die Höhe zum Durchmesser verhalten, daß dieselben für einen bestimmten körperlichen Inhalt die kleinstmöglichsten Hüllen werden.

* Die beyden letztern Aufgaben lassen eine allgemeine Probe zu.

III.

Integralrechnung.

8. Der Integrale (Stammgrößen)

a) Erklärung,

b) Bezeichnung, und

c) Behandlung, z. B.

$$s(4x^3 dx),\ s\left(\frac{2dx}{5\sqrt{x^3}}\right),\ s(ydx + xdy),$$

$$s(a^2 b dz),\ s\left(\frac{-adx}{x^3}\right).$$

9. Irrationale (nicht völlig bestimmbare) Integralausdrücke müßen durch Annäherung (per approximationem) behandelt werden.

10. Auch die beständigen Größen (Constantes), welche beym Differenzirен etwa verlohren gegangen, oder wenigst als verlohrne Größen zu betrachten sind, lassen sich nach dem Integriren wieder ausfindig machen.

* Es kann dieses in einem neuen Beweise des pythagorischen Lehrsatzes sehr sinnlich gezeigt werden.

11. Nach

11. Nach vorläufiger Herleitung der sogenannten Elemente oder Differenziale

a) der krummen Linien, $DA' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$,
b) der Flächen, $DP' = y\,dx$,
c) der Körper, $DC' = \pi y^2\,dx$, und
d) der krummen Oberflächen,
$DS' = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$;

können folgende Aufgaben gelöset werden:

Zu finden 1) die Länge der Kreislinie,
2) den Flächeninhalt des Kreises,
3) den körperlichen Inhalt des Kegels, und der Kugel,
4) die krumme Oberfläche dieser beyden Körper.

IV.

Einleitung zur höhern Geometrie.

12. Erklärung der unentbehrlichsten geraden Hilfslinien der höhern Geometrie, als

a) der Achsen,
b) der Ordinaten (Pfeile),
c) der Abscissen (Abschnitte, auch Achsenstücke).

13. Unter den möglichen Kegelschnitten gehören vorzüglich hieher:

a) die Parabel (Gleichschnitt),
b) die Hyperbel (Ueberschnitt),
c) die Ellipse (Fehlschnitt).

* Etymologische (stammforschende) Erklärung dieser drey Benennungen.

V. Von

V.

Von der Parabel.

14. In der Parabel ist überall das Quadrat der Ordinate so groß, als das Produkt aus der Absciſſe in eine beständige Größe, welche man den Parameter (Mitmesser) nennt. $y^2 = px$.

15. Aus der Gleichung der Parabel geht hervor:
1) Daß jeder Absciſſe zwey gleiche und entgegengesetzte Ordinaten zugehören;
2) Daß sich die Abſciſſen wie die Quadrate der Ordinaten verhalten; $x : X = y^2 : Y^2$.
3. Daß die Parabel nicht, wie der Kreis, in sich selbst zurückkehre.

16. Nachdem gezeigt worden, wie man für jede gegebene Parabel den Parameter als eine Linie anschaulich machen könne; wenn ferner gesagt worden, was man allgemein
a) unter Brennpunkt,
b) — Brennweite, und
c) — Brennstrahl

verstehe, so ist zu erweisen:
a) daß hier die Brennweite dem vierten Theile des Parameters gleich sey; $x = \frac{1}{4} p$.
b) daß der Brennstrahl so groß sey, als die Summe aus der Absciſſe und der Brennweite; $B = x + \frac{1}{4} p$.

* Daraus folgt eine sehr leichte Art, Parabeln geometrisch zu beschreiben.

17. Nach festgesetzten Begriffen
a) der Tangente (Taste),
b) — Subtangente (Untertaste),

c) der

c) der Normal (Tastenlothe),

d) — Subnormal (der Taste Unterlothe),

werden folgende Differentialausdrücke dieser Linien allgemein erwiesen:

1) Tang. $= \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$,

2) Subtang. $= \frac{y\,dx}{dy}$,

3) Norm. $= \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$,

4) Subnorm. $= \frac{y\,dy}{dx}$.

18. Mittels dieser analytischen Formeln kann erwiesen werden, daß in der Parabel obige Linien folgende Werthe haben:

1) Tang. $= 2\sqrt{x(x + \frac{1}{4}p)}$, oder $= 2\sqrt{Bx}$;

2) Subtang. $= 2x$;

3) Norm. $= \sqrt{p(x + \frac{1}{4}p)}$, oder $= \sqrt{Bp}$;

4) Subnorm. $= \frac{1}{2}p$.

19. Daraus geht eine leichte Methode hervor, auf jeden gegebenen Punkt der Parabel eine Tangente zu zeichnen.

20. Zieht man vom Berührungspunkt aus eine Linie innerhalb der Parabel mit der Achse parallel, und macht auch den Brennstrahl sichtbar, so sind die Winkel, die diese beyden Linien mit der Tangente machen, einander gleich.

21. Völlig bestimmbar (rational) ist der Parabel

a) Quadratur, und

b) Kuba-

b) Kubatur; doch letzteres nur, in so fern sie nicht vom Kreise abhängt.

* Nutzen der Parabel.

Anwendung. 1) Eine regelmäßig gesprengte Mine ist 20 Schuh tief, und die Weite der Oeffnung 36 Schuh; wie viele Kubikschuh Erde mußten von der Kraft des Pulvers gehoben werden?

2) Die Weite eines parabolischen Brennspiegels ist 28 Zoll und die Tiefe 10 Zoll; wo liegt der Brennpunkt?

VI.

Von der Ellipse.

22. In der Ellipse ist das Quadrat der Ordinate gleich einem Produkte aus drey Faktoren, getheilt durch die große Achse. Die Faktoren sind der Parameter, und die beyden Achsenstücke, welche die Ordinate bestimmt: $y^2 = \frac{px(A-x)}{A}$.

* Auch aus Walzen lassen sich Ellipsen schneiden.

23. Daraus ergiebt sich:

a) Warum dieser Kegelschnitt Ellipse heiße;
b) Wie viele Ordinaten jeder Absciße zugehören.
c) Welches Verhältniß die Ordinaten zu den entsprechenden Achsenstücken haben;
d) Daß unendlich lange Ellipsen als Parabeln anzusehen sind;
e) Daß der Kreis eine Art Ellipse sey.

24. Die kleine Achse ist die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Achse und dem Parameter: $a = \sqrt{A p}$.

25. Durch diesen Lehrsatz wird man in Stand gesetzt:

1) Den Parameter in beyden Achsen algebraisch auszudrücken; $p = \frac{a^2}{A}$.

2) Sowohl den Parameter als die beyden Brennpunkte durch Zeichnung sichtbar zu machen.

26. Wird statt dem Parameter die kleine Achse in die Rechnung gebracht, so geht die Gleichung für die Ellipse hervor:
$y^2 = \frac{a^2 x}{A} - \frac{a^2 x^2}{A^2}$, oder, wenn man lieber will, $y^2 = \frac{a^2}{A^2}(A x - x^2)$.

* Daraus ist mehrmals ersichtlich, daß der Kreis eine Art Ellipse sey, wo die beyden Achsen gleiche Größe haben.

27. Werden in dieser neuen Gleichung die Abscissen vom Mittelpunkt aus genommen, und durch v ausgedrückt, so überkömmt sie diese Gestalt: $y^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 v^2}{A^2}$.

28. Die beyden Brennweiten, von einem beliebigen Scheitel an gerechnet, lassen sich durch diese Formel bestimmen: $x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - a^2}}{2}$.

29. Dadurch ergiebt sich ein Werth für die Entfernung der beyden Brennpunkte von einander: $s = \sqrt{A^2 - a^2}$.

30. Ein Brennstrahl, auf den Endpunkt der kleinen Achse hingezogen, ist der halben großen Achse gleich.

* Hieraus folgt eine sehr leichte Art, in jeder gegebenen Ellipse die Brennweite zu bestimmen.

31. Die Summe der beyden Brennstrahlen eines Punktes der Ellipse ist überall der großen Achse gleich: $B + b = A$.

* Dadurch wird man in Stand gesetzt, eine Ellipse sowohl geometrisch, als mechanisch zu zeichnen.

32. Durch jeden Punkt der Ellipse kann eine Tangente gezogen werden.

33. Die Winkel, welche die beyden Brennstrahlen mit der Tangente machen, sind einander gleich.

34. Werden die Ordinaten auf der kleinen Achse gezogen, so ist:

$$u^2 = \frac{A^2 z}{a} - \frac{A^2 z^2}{a^2}.$$

35. Sieht man die ludolphische Zahl π als völlig gegeben an, so ist sowohl

a) die Quadratur, als

b) die Kubatur der Ellipse

rational; denn erstere hat zur Formel: $E = \frac{aA\pi}{4}$, die zweyte hingegen: $\mathfrak{E} = \frac{a^2 A\pi}{6}$, und $\frac{aA^2\pi}{6}$, je nachdem sich die Ellipse um die große oder kleine Achse dreht.

36. Die Länge des Umkreises einer Ellipse läßt sich durch die Formel bestimmen:

$$E = 2\sqrt{A^2 + a^2\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right)} \text{ oder } = 2\sqrt{A^2 + a^2 . 1{,}4674011\ldots}$$

37. Dieser Satz hält die Probe;

a) Wenn $a = A$ gesetzt wird; denn da kömmt der Umfang des Kreises zum Vorschein:

b) Wenn man a unendlich klein werden läßt; denn bey dieser Bedingniß muß der Umfang der Ellipse die doppelte Achsenlänge geben.

* Nutzen der Ellipse.

Anwen-

Anwendung. 1) Montgolfier füllte im Jahr 1783 in Paris einen Luftballon, der 57 Fuß hoch und 41 dick war; wie viel Kubikschuh brennbarer Luft war dazu nothwendig?

2) Eine länglichte Schachtel ist 8 Zoll hoch. Der größere Durchmesser des Bodens mißt 14 Zoll und der kürzere 10. Sie soll mit Hirse gefüllt werden; wie viel hält sie bairische Maaß? Die Maaß beträgt genau 74,304 Kubikzoll.

VII.

Von der Hyperbel.

38. Nachdem vorläufig gesagt worden:

a) Was der Hyperbelschnitt vor den beyden übrigen Kegelschnitten besonders habe;

b) Was man hier unter großer und kleiner Achse verstehe: läßt sich die Gleichung $y^2 = \frac{px(A+x)}{A}$ aus der Natur des Schnitts erweisen.

39. Daraus folgt:

a) Daß die Hyperbel eine Ellipse von verneinter Achse sey;

b) Daß die Achse an beyden Endpunkten von der krummen Linie geschnitten werde;

c) Daß auf der vereinten Achse keine Ordinate möglich sey.

d) Wohl aber diesseits und jenseits derselben.

40. Die drey Gleichungen der Ellipse

$$1)\ y^2 = \frac{a^2 x}{A} - \frac{a^2 x^2}{A^2},$$

$$2)\ y^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 v^2}{A^2},$$

$$3)\ E = \sqrt{A^2 - a^2},$$

ändern sich für die Hyperbel nur in Zeichen, nicht in Größen.

41. Auch hier lassen sich die Brennpunkte und der Parameter durch Zeichnung versinnlichen.

42. Die Differenz zweyer Brennstrahlen eines Punkts in der Hyperbel giebt die große Achse $B - b = A$.

* Methode, eine Hyperbel geometrisch zu beschreiben.

43. Das Zeichnen der Tangente für die Hyperbel hat viele Aehnlichkeit mit diesem Geschäft in der Ellipse.

44. Auch hier sind die zwey Winkel einander gleich, die die Brennstrahlen mit der Tangente bilden.

45. Nachdem gesagt worden, was man unter Assymtoten der Hyperbel verstehe, läßt sich sowohl aus ihrer Natur, als auch durch die Analyse streng beweisen, daß sich zwar die Hyperbeläste den Assymtoten unendlich nähren, aber doch nie damit in einen Punkt zusammen fallen können.

* Nutzen der Hyperbel.

Sätze

aus der

allgemeinen Naturlehre, und der dahin einschlägigen angewandten Mathematik.

Seinen Schülern

zur Prüfung vorgelegt

vom

Professor Prändel.

München, bey Joseph Lentner, 1804.

I.

Vorerinnerungen.

1. Das Wort Natur hat nach dem Sprachgebrauche einen dreyfachen Sinn, nämlich

   a) in materieler,

   b) in formeler, und

   c) in sonderheitlicher Bedeutung.

* Unterschied zwischen Natur und Wesenheit eines Dings.

2. Der Naturlehre überhaupt

   a) Geschäft,

   b) Abtheilung.

3. Der eigentlichen Naturlehre
   a) Objekt,
   b) Unterabtheilung,
   c) Verhältniß der beyden Theile zu einander.

4. Beantwortung der Fragen:
   1) Welche nahmhafte Einschränkung die Naturlehre nebenher noch auf Schulen, und in den gewöhnlichen Lehrbüchern leidet?
   2) Was das Resultat der ersten und allgemeinsten Erfahrung sey?
   3) Was man unter Naturerscheinungen verstehe?
   4) Woraus die Naturerscheinungen erklärt werden müßen?
   5) Was bey Erklärung der Naturerscheinungen theils schwer, theils unmöglich sey?

5. Der Naturgesetze
   a) Erklärung überhaupt,
   b) Grund, und
   c) Nutzen.

6. Der Erfahrung äußerer Sinne
   a) Erklärung,
   b) Unterabtheilung,
   c) Mittel.

7. Gelegenheitlich läßt sich hier auch sagen:
   a) Wer den Namen eines Naturforschers verdiene;
   b) Wie man beym Philosophiren in der Naturlehre zu Werke gehen soll;
   c) Was man unter einer sogenannten Theorie verstehe.

8. Der allgemeinen Regeln Neutons

a) Aufzählung,

b) Erläuterung.

9. Nachdem noch einige besondere Verhaltungsregeln für den angehenden Naturforscher aufgestellet worden, lassen sich auch die Fragen beantworten:

1) Was man unter Hypothese verstehe?

2) Was von den Hypothesen in der Naturlehre zu halten sey?

3) Welche Eigenschaft eine gute Hypothese haben müße?

10. Der Hilfswissenschaften der Naturlehre

a) Aufzählung,

b) Wichtiger Einfluß auf letztere.

11. Der Naturlehre, als Wissenschaft betrachtet,

a) Erklärung,

b) Eintheilung,

c) Nutzen,

d) Geschichte, und

e) Litteratur.

II.

Allgemeine Körpereigenschaften.

12. Begriff

a) des Körpers überhaupt,

b) des Körperstoffs, oder der Materie.

13. Jedem Körper liegt ein reeler Stoff zum Grunde, in den der Körper zwar aufgelöset, der aber auf keine Weise vernichtet werden kann.

14) Der allgemeinen Körpereigenschaften
a) Begriff überhaupt,
b) Aufzählung.

15. Der Porosität (Löcherichkeit)
a) Erklärung,
b) Beweis,
c) Grundursache,
d) Nutzen.

16. Der Undurchdringlichkeit
a) Begriff,
b) Allgemeines Daseyn,
c) Angebliche Ursache,
d) Unverkennbarer Nutzen.

17. Der Ausdehnung
a) Schulbegriff,
b) unmittelbare Ableitung,
c) nothwendige Folge,
d) Nutzen in doppelter Hinsicht.

18. Des Zusammenhangs
a) doppelter Begriff,
b) Daseyn in allen Körpern,
c) Vorgeblicher Grund,
d) Wohlthat.

19. Der Theilbarkeit
   a) Erklärung,
   b) Eintheilung,
   c) Allgemeinheit,
   d) erstaunlich hoher Grad,
   e) Grund,
   f) Nutzen.

20. Der Schnellkraft
   a) Erklärung,
   b) allgemeine Erscheinung,
   c) verschiedne Grade,
   d) Verstärkungsmittel,
   e) Nutzanwendung.

21. Der Beweglichkeit
   a) Erklärung,
   b) Allgemeinheit,
   c) nächster Grund,
   d) Wohlthat für die Menschheit.

22) Der Trägheit
   a) Begriff,
   b) Daseyn in allen Körpern,
   c) Nutzen.

23. Der Schwere
   a) allgemeiner Begriff,
   b) Eintheilung,
   c) Daseyn in beyder Rücksicht,
   d) Grundursache, — und Vortheilgewährung.

24. Naturgesetze
a) der Undurchdringlichkeit,
b) der Ausdehnung,
c) des Zusammenhangs irdischer Körper,
d) der Schnellkraft, und
e) der Trägheit.

25. Hieher scheint auch die metaphysische Behauptung zu gehören:
1) Nimmt man in den Uranfängen des Körperstoffes Stoßkräfte (vires repulsiuas) an; so müßen auch Zugkräfte (vires attractiuae) zugegeben werden; und umgekehrt,
2) läßt man Zugkräfte zu, so müßen auch Stoßkräfte eingeräumt werden.

26. Die Theilbarkeit veranlaßt noch den Lehrsatz: Der Raum ist in's unendliche theilbar.

27. Vom Zusammenhang wäre auch noch die Eintheilung der Körper nachzutragen
a) in feste und flüßige,
b) in harte und weiche,
c) in zähe und spröde.

28. Nachdem erkläret worden, was man verstehe unter des Körpers
a) Masse,
b) Rauminhalt, (Volumen)
c) Dichtigkeit, und
d) Lockerheit,
lassen sich die Sätze aufstellen:

1) Die Dichtigkeiten zweyer Körper, deren Rauminhalt einerley ist, verhalten sich gerade wie ihre Massen, das ist: wenn $v = V$, so ist $d : D = m : M$.

2) Sind in zweyen Körpern die Rauminhalte verschieden, und die Massen gleich, so verhalten sich ihre Dichtigkeiten umgekehrt, wie ihre Rauminhalte, das heißt: wenn $m = M$, so ist $d : D = V : v$ oder $= \frac{1}{v} : \frac{1}{V}$.

3) Sind aber Masse und Rauminhalt verschieden, dann verhalten sich die Dichtigkeiten in solchen Körpern gerade wie ihre Massen, und verkehrt wie die Räuminhalte $d : D = \frac{m}{v} : \frac{M}{V}$.

29. Setzt man in letzterer Proportion entweder die Massen oder die Rauminhalte gleich, so gehen wieder die erstern einfachen Proportionen hervor.

30. Sind die Begriffe von

a) Schwere,

b) Schwerkraft,

c) Gewicht

gehörig aus einander gesetzt, so nimmt obige zusammen gesetzte Proportionsformel folgende mehr brauchbare Gestalt an:

$$d : D = \frac{p}{v} : \frac{P}{V}.$$

* Anwendung. Um wie viel dichter ist Wasser als Luft, da ein rheinischer Kubikzoll Wasser 1,211 Loth kölnisch; hingegen ein rheinischer Kubikschuh Luft 2,437 Loth wiegt?

31. Nachdem auch noch das eigenthümliche Gewicht eines Körpers von dessen unbedingtem Gewicht unterschieden worden; so kann man erweisen, daß sich die eigenthümlichen Schweren zweyer Körperarten gerade wie ihre Dichtigkeiten verhalten. $g : G = d : D$.

* Etwas über die vorhandenen Tabellen der eigenthümlichen Schweren.

32. Wenn von den drey Größen

a) Rauminhalt,

b) eigenthümliches, und

c) unbedingtes Gewicht

eines Körpers zwey bekannt sind, so kann die dritte Größe allemal durch Rechnung bestimmt werden, mittels der kleinen Formel

$$p = g \mu v.$$

* Anwendungen. 1) Was wiegt eine Maaß Quecksilber?

2) Welchen Kaliber haben Kanonen, die 24pfünder schießen?

3) Welche eigenthümliche Schwere haben die Mühlsteine von Ehenfeld in der obern Pfalz, wenn jeder Zoll in die Höhe 100 ℔ hält, und der Durchmesser 40 Zoll ist?

33. Aus obigen Sätzen gehet auch die Behauptung hervor: Bey Körpern von einerley Dichtigkeit, oder von einerley Art, verhalten sich die unbedingten Gewichter, wie ihre Rauminhalte; das heißt: wenn $d = D$, oder $g = G$, so ist $p : P = v : V$.

III.

Einleitung zur Theorie der Bewegung.

34. Begriff
 a) der Bewegung überhaupt,
 b) der Geschwindigkeit,
 c) der Richtung,
 d) der Größe der Bewegung,

wovon die Proportion gilt: $q : Q = pc : PC$.

* Anwend. Ein Mauerbrecher, wie sie die Alten hatten, wäge 15 Zenten, und seine Geschwindigkeit im Anlaufe sey so beschaffen, daß er in einer Sekunde 6 Schuh durchläuft. Ein anderer Mauerbrecher wäge nur 9 Zenten; — wie groß muß da die Geschwindigkeit seyn, damit ihre Wirkung gleich ausfalle?

35. Eintheilung der Bewegung in
 a) unbedingte und rücksichtliche,
 b) gerad- und krummlinigte,
 c) gemeinschaftliche und eigne,
 d) scheinbare und wirkliche,
 e) einfache und zusammen gesetzte,
 f) gleichförmige und ungleichförmige,
 g) beschleunigte und verzögerte,

welche beyde letztern wieder gleichförmig oder ungleichförmig, beschleunigt oder verzögert seyn können.

36. Bey der gleichförmigen Bewegung ist der Raum jedesmal ein Produkt aus der Zeit und Geschwindigkeit.

$s = ct$; woraus noch hervor geht $t = \frac{s}{c}$.

* Beyspiel. Der Schall beweget sich in jeder Sekunde 1076 rheinische Schuh. Nun hörte man i. J. 1800 hier in Amberg deutlich aus Würzburg kanoniren; — wie lang brauchte dieser Schall bis hieher, da die beyden Städte gegen 22 deutsche Meilen aus einander liegen, und die deutsche Meile zu 23661 rheinische Schuh gerechnet wird?

37. Bey zwey gleichförmigen Bewegungen verhalten sich die Geschwindigkeiten gerade wie die Räume, und umgekehrt wie die Zeiten. Es ist

$$c : C = \frac{s}{t} : \frac{S}{T};$$

welche Proportion bey gleichen Räumen oder Zeiten auch einfacher wird.

* Beyspiel. Der Adler soll in einer Minute 5726 Pariser Schuh hinterlegen, die Schnecke hingegen in 10 Minuten 3 Schuh; — wie vielmal geschwinder ist der Adler als die Schnecke?

38. Das Differential oder Element des Raums für jede Bewegung ist ein Produkt aus dem Differential der Zeit in die Geschwindigkeit, die gerade da herrschend ist: $d s = y d z$.

39. Die Natur jeder gleichförmig beschleunigten Bewegung läßt sich durch die Gleichung ausdrücken: $y = a z$.

40. In der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist der Raum nach einer bestimmten Zeit die Hälfte desjenigen, den der Körper in der nämlichen Zeit gemacht haben würde, wenn er die Endesgeschwindigkeit gleich Anfangs gehabt, und dann beybehalten hätte.

$$s = \frac{y z}{2}.$$

IV.

Vom freyen Fall der Körper.

41. Beym freyen Fall hat man Gesetze in Hinsicht

a) der Richtung,
b) der allgemeinen Geschwindigkeit,
c) des Raumes der ersten Zeitsekunde,
d) der Schwerkraft unter verschiednen Umständen.

* Die Geschwindigkeit der täglichen Erdendrehung läßt sich für jede geographische Breite oder Polhöhe durch die sehr einfache Formel bestimmen:

$$c = \frac{\cos. \beta}{16}.$$

42. Setzt man die Einwirkung der Schwungkraft der Erde bey Seite, so kann erwiesen werden, daß die Schwerkraft ein umgekehrtes Quadratverhältniß mit dem Abstand vom Mittelpunkt der Erde habe:

$$v : V = D^2 : d^2.$$

43. Die kleine Formel $v = \frac{g}{d^2}$ giebt den Fallraum der ersten Zeitsekunde für jede gegenbare Distanz an.

* Beyspiel. Wie weit würde der Mond in der ersten Sekunde herabfallen, weñ ihn seine Wurfkraft verließe?

44. Die Schwerkraft auf der Oberfläche eines jeden Weltkörpers, dessen Masse und Halbmesser bekannt sind, läßt sich durch die Formel bestimmen:

$$v = \frac{gm}{r^2}.$$

45. Der Fall der Körper in Entfernungen, die von der Oberfläche der Erde noch keine Meile betragen, kann sehr wohl als eine gleichförmig beschleunigte Bewegung angesehen werden.

46. Die Aequation der Natur der gleichförmig beschleunigten Bewegung ändert sich für den freyen Fall dahin ab: $y = 2\ g\ z$.

47. Man findet den Raum für jede bestimmte Zeit in Sekunden genommen, wenn das Quadrat derselben mit dem Fallraum der ersten Sekunde gesättigt wird: $s = g\ z^2$.

* Anwendung. Von dem Wipfel des Münsterthurms in Straßburg hat ein Stein 6,188 Sekunden herab zu fallen; wie hoch ist er?

48. Drücket man, bey dem freyen Falle der Körper, den Raum durch h (Höhe), die übrigen Größen aber durch die bisher gewöhnlichen Buchstaben aus, so ergeben sich für diese Art Bewegung in Allem folgende zwölf Formeln.

I.

1) $h = \frac{yz}{2}$.

2) $z = \frac{2h}{y}$.

3) $y = \frac{2h}{z}$.

II.

4) $y = 2\ g\ z$.

5) $z = \frac{y}{2g}$.

6) $g = \frac{y}{2z}$.

III.

7) $h = g\ z^2$.

8) $z = \sqrt{\frac{h}{g}}$.

9) $g = \frac{h}{z^2}$.

IV.

10) $h = \frac{y^2}{4g}$.

11) $y = 2\sqrt{gh}$.

12) $g = \frac{y^2}{4h}$.

* Beyspiele. 1) Wie hoch müßte eine Bleykugel herab fallen, daß sie die nämliche Gewalt ausübte, als wenn sie

aus einem Feuergewehr wäre losgebrannt worden, von wo aus sie, in der ersten Sekunde, gegen sechs hundert Schuh durchläuft?

2) Wie groß ist die Endes-Geschwindigkeit einer Schlosse (Hagelkorn), die aus einer Wolke niederfällt, welche 1000 Schuh von uns absteht?

49. Noch können von dieser Art Bewegung die zwey Sätze nachgeholt werden:

1) Die Räume, vom Anfang der Bewegung an gerechnet, verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten.
2) Die Räume, die in einzelnen Zeiten, z. B. von Sekunde zu Sekunde, hinterlegt werden, sind wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, u. s. w.

V.

Ueber einfache und zusammengesetzte Bewegung.

50. Die einfache Bewegung hat Gesetze

a) für eine einzige Kraft;
b) für mehrere Kräfte nach der nämlichen Richtung;
c) für zwey Kräfte, nach völlig entgegen gesetzten Richtungen.

51. Wirken zwey Kräfte in gleichförmiger Bewegung auf einen Körper unter einem Winkel, so beschreibt der Körper die Diagonal jenes Parallelogramms, wozu die Kräfte die Schenkel des Winkels als Seiten vorstellen.

52. Obiger Lehrsatz veranlaßt

a) Zusammensetzungen mehrerer Kräfte unter verschiednen Winkeln;

b) Auflösung einer zusammengesetzten Kraft in ihre Bestandtheile.

VI.

Ueber gebrochene und abgeprellte Bewegung.

53. Nachdem vorläufig erklärt worden:

1) Was man unter Mittel (medium) verstehe;

2) Wann die Bewegung gebrochen heiße;

3) Was man a) Einfallslothe,
b) Einfallswinkel, und
c) Brechungswinkel

nenne; können die Gesetze erörtert werden, welche

a) den senkrechten Uebergang eines kugelförmigen Körpers von einem Mittel in's andere;

b) den schiefen Uebergang eines solchen Körpers betreffen.

54. Ist die Erklärung von der abgeprellten Bewegung, und den dabey vorkommenden Winkeln voraus geschickt, so giebt es auch hier Gesetze für die federharten Kugeln in Hinsicht

a) des senkrechten Wurfes gegen harte oder federkräftige Flächen;

b) des schiefen Wurfes gegen solche Flächen.

VII.

Vom Stoße.

55. Des Stoßes
    a) Begriff überhaupt,
    b) Bedingungen, die die Untersuchung leicht machen;
    c) Abtheilung sowohl in Rücksicht
        1) der Körper, als
        2) ihrer Geschwindigkeit.

56. Die Größe der Bewegung wird beym Aufstoße unfederharter Körper im Ganzen nicht vermindert, sondern nur die Geschwindigkeit anders vertheilt, das heißt, so ausgeglichen, daß der langsamere oder ruhende Körper keine Hinderniß mehr ist.

57. Die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Aufstoße unfederharter Körper läßt sich durch die Gleichung bestimmen:

$$x = \frac{PC + pc}{P + p}.$$

58. Diese Formel ändert sich,
    a) wenn der Körper, welcher den Stoß empfängt, ruht;
    b) wenn derselbe noch überdieß als unbeweglich anzusehen ist;
    c) wenn beyde Körper sich gegen einander bewegen;
    d) wenn im letztern Fall die Gewichte gleich sind.

* Beyspiel. Eine Thonkugel hält 5 Loth, und hat eine Geschwindigkeit, daß sie jede Sekunde 6 Schuh zurücklegt. Diese wird von einer andern Kugel eingeholt, welche vier

Loth wiegt, und jede Sekunde 8 Schuh macht. Welche Geschwindigkeit haben beyde nach dem Aufstoß?

59. Bey federharten Körpern ist sowohl der Verlust der Geschwindigkeit des stossenden, als der Gewinn des gestossenen Körpers doppelt so groß, als bey unfederharten.

60. Die Geschwindigkeit federharter Körper nach dem Aufstoße kann ebenfalls bestimmt werden; denn sie ist, wenn dem stossenden die größern Buchstaben zugehören,

a) im stossenden Körper $y = \frac{(P - p) C + 2 p c}{P + p}$.

b) im gestossenen $z = \frac{(p - P) c + 2 P C.}{P + p}$

61. Für den Aufstoß auf einen ruhenden federharten Körper ist

1) $y = \frac{(P - p) C.}{P + p}$

2) $z = \frac{2 P C.}{P + p}$

62. Für den Gegenstoß ändern sich die beyden Formeln so:

1) $y = \frac{(P - p) C - 2 p c.}{P + p}$

2) $z = \frac{(P - p) c + 2 P C.}{P + p}$

63. Die Antworten, welche obige Formeln auf folgende zwey Fragen geben, kommen völlig mit der Erfahrung übereins.

1) Was geschieht, wenn der ruhende Körper für die Kraft des stossenden unbeweglich ist?

2) Wie ändern sich die Geschwindigkeiten beym Gegenstoß, im Fall die Gewichter gleich sind?

64. Es läßt sich allgemein erweisen, daß bey keinem Stoße etwas von der Größe der Bewegung im Ganzen verlohren gehe; sondern daß auch hier die drey Gesetze der einfachen Bewegung im strengsten Sinne beobachtet werden. Es ist daher

a) Nach dem Aufstoß auf einen ruhenden Körper
$Q = P\,C$;

b) Nach dem Aufstoß auf einen langsamern
$Q = P\,C + p\,c$;

c) Nach dem Gegenstoße $Q = P\,C - p\,c$.

VIII.

Von der Bewegung über die geneigte Ebne.

65. Der schiefen Fläche oder der geneigten Ebne

a) Erklärung,

b) Theile.

66. Die Bewegung über die geneigte Ebne ist gleichförmig beschleunigt; daher

a) Unterschied vom freyen Fall,

b) Folgesatz.

67. Die Rollkraft läßt sich für jede geneigte Ebne bestimmen; denn es ist entweder

a) $v = \frac{a\,g}{l}$, oder

b) $v = g$ sin. n.

68. Durch letztere Gleichung kann bestimmt werden, welche Größe die Parallelkraft habe,

1) wenn der Neigungswinkel = o;
2) wenn er = 30°;
3) wenn er = 90°;
4) wenn er stumpf wird;
5) wenn er bis zu 180° anwächs't.

69. Hieher gehörige Fragen:

a) Welche Aenderungen sind in den Formeln des freyen Falls vorzunehmen, damit sie für die schiefe Fläche passen?
b) Welche Gestalt bekommen demnach obige zwölf Formeln des freyen Falls für die schiefe Fläche?
c) Was wird z. B. aus den Formeln:

1) $S = v Z^2$.
2) $Z = \frac{Y}{2v}$.
3) $Y = 2 \sqrt{S v}$, wenn man statt v
   1. den geometrischen,
   2. den trigonometrischen Werth substituirt?

70. Aus dem oben erhaltenen Formelvorrathe lassen sich die fünf Sätze erweisen:

1) Wird die schiefe Fläche ganz durchloffen, so ist die Endesgeschwindigkeit

$Y = 2 \sqrt{a g}$; und die Zeit

$Z = \frac{1}{\sqrt{ag}}$.

2) Die Endesgeschwindigkeit ist überall einerley, der Körper mag durch die Höhe der schiefen Fläche

hinab fallen, oder über die Länge derselben hinunter gleiten: $y = Y$.

3) Die Zeit der Bewegung über die Länge der schiefen Fläche verhält sich zur Zeit des Falls durch die Höhe derselben, wie eben diese Länge zur Höhe:

$$Z : z = l : a.$$

4) Der Raum über einen Theil der schiefen Ebne verhält sich zum Raum des freyen Falls in der nämlichen Zeit, wie die Höhe zur Länge:

$$S : f = a : l.$$

5) Die nämliche Behauptung läßt sich auch in Hinsicht der Endesgeschwindigkeit machen:

$$Y : y = a : l.$$

* Leichte Methode, den Fallraum der ersten Sekunde zu bestimmen.

* Beyspiele. 1) Auf einer Kegelbahn ist die Rinne zum Rücklaufe der Kugel 72 Schuhe lang, und beym Einwurf um 5 Schuhe höher, als am andern Ende; wie lang brauchet die Kugel, wenn sie hinein gelegt, statt hinein geworfen wird?

2) Eine gerade Bergstrasse neiget sich unter einem Winkel von 11° zum Horizonte, und ist 2740 Schuhe lang; wie viel Sekunden brauchet ein frey gelassener Schlitten bey guter Bahn?

71. Besonders merkwürdig ist der Satz: Der senkrechte Durchmesser wird zur nämlichen Zeit im freyen Fall hinterlegt, während eine der Sehnen, die mit ihm einen Winkel bilden, durchloffen wird:

$$z = Z.$$

* Für eine beständige Grundlinie die Höhe einer geneigten Ebne zu finden, daß der Körper zum Durchlaufen die wenigste Zeit vonnöthen hat.

IX. Pendel.

IX.

Pendelbewegung.

72. Des Pendels
 a) Erklärung,
 b) Eintheilung.

73. Festsetzung folgender Begriffe:
 a) Schwung sowohl
  α) einfacher, als β) zusammengesetzter.
 b) Aufhangspunkt,
 c) Schwungpunkt,
 d) Schwungbogen,
 e) Pendellänge,
 f) Erhebung des Pendels,
 g) Sekundenpendel.

* Praktisches Verfahren, den Schwungpunkt oder die wahre Länge jedes zusammengesetzten Pendels zu bestimmen.

74. Die anfängliche Schwungkraft (vis vibratoria), wenn das Pendel den Bogen hinab zu fallen beginnet, ist gleich dem Produkt aus dem Fallraum der ersten Sekunde in den Sinus der Erhebung:

$$w = g \sin. e.$$

75. Daraus gehen die Sätze hervor:
 1) Die Pendelbewegung ist ungleichförmig beschleunigt.
 2) Die anfängliche Schwungkraft durch den Bogen ist auch gleich dem Produkt aus der doppelten Rollkraft über die Sehne in den Kosinus der halben Erhebung:

$$w = 2 v \cos. \tfrac{1}{2} e.$$

3) Beschreibt das Pendel einen sehr kleinen Bogen, etwa von einigen Minuten, so ist die anfängliche Schwungkraft beynahe noch so groß, als die Rollkraft über die Sehne:

$$w = 2 v.$$

76. Hält die Länge eines Pendels 440,5 Pariser Linien, und die Schwungweite etwa 12 solche Linien, wie dieß der gewöhnliche Fall bey Sekundenpendeln ist,

a) dann beträgt der Erhebungswinkel e, oder der halbe Schwungbogen $\beta = 46' \, 50''$.

b) Und dieser Bogen kömmt an Länge so nahe mit seiner Sehne übereins, daß der Unterschied nur $\frac{1}{20000}$ einer Pariser Linie, oder $\frac{1}{200}$ einer Haarbreite ausmacht.

77. Für die Hälfte eines so kleinen Schwungbogens ist das Differential: $d\beta = dx \sqrt{\frac{1}{2x}}$; folglich für die Zeit derselben: $dt = dx \sqrt{\frac{1}{8gx(h-x)}}$.

78. Daraus findet sich die Zeit für jedes Pendel durch die Hälfte eines solchen Bogens: $t = \pi \sqrt{\frac{1}{8g}}$.

79. Mittels dieser Formel sind wir in Stand gesetzt,

1) a priori zu erweisen, daß das Sekundenpendel in unsern Gegenden, das heißt für $g = 15{,}0957$ genau 3 Schuhe und $8\frac{1}{2}$ Linie (alles Pariser Maaß) lang seyn müße.

2) Daß sich die Zeit durch die Hälfte eines sehr kleinen Schwungbogens zur Zeit über dessen Sehne

wie der Kreisumfang zu vier Durchmessern, oder wie die Ludolphische Zahl zu 4 verhalte:

$$t : T = 3{,}14159 \ldots : 4.$$

3) Aus der erforderlichen Länge des Sekundenpendels in verschiedenen Gegenden der Erde die dort herrschende Schwerkraft, das ist, den Fallraum der ersten Sekunde genau zu bestimmen, wozu die kleine Formel dient: $G = \frac{l\pi^2}{288}$.

* Anwendung. In Petersburg muß das Sekundenpendel eine Länge von 441,2 Pariser Linien haben; wie groß ist dort der Fallraum der ersten Sekunde?

80. Die Schwingungszeiten zweyer Pendel von ungleicher Länge, und an verschiednen Orten der Erde, verhalten sich gerade wie die Quadratwurzeln aus den Längen, und umgekehrt wie eben diese Wurzeln aus den Schwerkräften: $t : T = \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{L}{G}}$; welche Proportion, wenn $g = G$, oder $l = L$ ist, sich einfacher ausdrücken läßt.

81. Ist von zweyen Pendeln die Zahl der Schwingungen in einerley Zeit bekannt, z. B. in einem Sterntag, dann gilt folgende Proportion: $n : N = \sqrt{\frac{g}{l}} : \sqrt{\frac{G}{L}}$, die sich ebenfalls nach Umständen abkürzt.

* Anwendungen. 1) Eine Kirchenlampe macht in 7 Sekunden zwey Schwingungen; wie hoch ist die Kirche, wenn vom Pflaster bis zur Lampe noch neun Schuhe gerechnet werden?

2) Der Astronom Richer fand, daß sein Pendel zu Cayenne in 24 Stunden um 150 Schwingungen weniger

als in Paris machte; wie groß muß dort der Fallraum der ersten Sekunde seyn?

82. Noch wären vom Pendel nachzutragen:
a) Die Gebrechen desselben,
b) Mittel dagegen, und endlich
c) der Nutzen der Pendel.

X.

Zentralbewegung.

83. Der Zentralkräfte
a) Erklärung,
b) Eintheilung.

* Was von der sogenannten Zentrifugalkraft zu halten sey.

84. Erklärung
a) des Fahrstrahls,
b) der Ausschnitte (Sektoren),
c) der verschiednen Bahnen.

85. Ist die Bahn ein Kreis, so lassen sich für die Weltkörper folgende Sätze behaupten:

1) Die Schwerkraft eines Weltkörpers gegen den, um welchen er sich bewegt, ist gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit, getheilt durch den Durchmesser der Laufbahn: $v = \frac{c^2}{d}$.

2) Die nämliche Schwerkraft läßt sich auch durch Beyziehung der Umlaufszeit bestimmen. Sie ist gleich

dem Produkt des Durchmessers in das Quadrat der Ludolphischen Zahl, getheilt durch das Quadrat der Umlaufszeit: $v = \frac{d\pi^2}{t^2}$.

86. Fortsetzung dieser Lehrsätze:

1) Die Massen solcher Weltkörper, um welche sich andere bewegen, lassen sich aus den Umlaufszeiten, und aus den Abständen ihrer Begleiter bestimmen. Sie verhalten sich gerade wie die Würfel der Abstände, u. umgekehrt wie die Quadrate der Umlaufszeiten:

$$m : M = \frac{r^3}{t^2} : \frac{R^3}{T^2}.$$

2) Daraus geht Kepplers Lehrsatz hervor: Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich bey den Planeten wie die Würfel der Abstände, das ist, der Halbmesser ihrer Laufbahn: $t^2 : T^2 = r^3 : R^3$.

* Anwendung. Wie vielmal größer mag wohl die Masse der Sonne als die der Erde seyn? Der Mond ist im Mittel genommen 60 halbe Erdmesser von der Erde entfernt, und die Umlaufszeit macht 27,32 Tage. Der Erde mittlere Entfernung von der Sonne beträgt 23430 Erdhalbmesser, und die Umlaufszeit der Erde bekanntlich 365,25 Tage.

87. Auch folgende zwey Behauptungen müßen hieher gerechnet werden:

1) Jedem Weltkörper kömmt in der Kreisbewegung eine Geschwindigkeit zu, die gerade so groß ist, als sie

dieser Körper erhalten würde, wenn er den vierten Theil des Durchmessers seiner Laufbahn mit der anfänglichen Schwerkraft gleichförmig beschleunigt hinab fiele, das heißt, wenn $h = \frac{d}{4}$, so ist $c = \sqrt{v\,d}$, wie sich dieß aus $v = \frac{c^2}{d}$ ergiebt.

2) Könnte man einer horizontal abgeschossenen Kanonenkugel die Geschwindigkeit geben, daß sie in der ersten Sekunde 2520 rheinische Schuhe zurücklegte, so würde sie

a) als ein neuer Trabant sich stäts um die Erde bewegen;

b) und ihre Umlaufszeit würde 0 Tag, 1 Stunde, 24 Minuten, und 28,7 Sekunden betragen.

88 Nachdem gesagt worden, worin sich die Kräfte der sogenannten Zentralmaschinen von denen der Weltkörper unterscheiden, kann erwiesen werden, daß bey erstern die Proportion Statt habe:

$$v : V = \frac{mr}{t^2} : \frac{MR}{T^2}.$$

89. Ist die Bahn eine Ellipse, so gelten folgende Gesetze:

1) Die Zeit durch jeden Bogen steht mit dem dazu gehörigen Ausschnitt im Verhältniße: $t : T = s : S$.

2) Man findet die Zeit durch einen gegebenen Bogen am leichtesten, wenn das Produkt aus dem entsprechenden Ausschnitt in die ganze Umlaufszeit durch den Flächeninhalt der ganzen Ellipse getheilt wird:

$$t = \frac{s\,t}{E}, \text{ oder } = \frac{j\,s}{E},$$

wo j das Jahr eines Planeten bedeutet.

3) Daraus folgt, daß Herbst und Winter um etliche Tage kürzer als Frühling und Sommer sind.

90. Fernere Lehrsätze:

1) Die Geschwindigkeit ist bey der größten Entfernung von dem Mittelpunkte der Kräfte die kleinste; dann wächst sie bis zur kleinsten Entfernung, wo sie am größten ist; von dort aus nimmt sie wieder ab.
2) Die Geschwindigkeit in jeder Stelle der Ellipse ist gleich dem Produkt aus der kleinsten Geschwindigkeit in den größten Fahrstrahl, getheilt durch die Lothe, welche aus der Kräfte Mittelpunkt auf die Taste dieser Stelle hingefällt wird; $C = \frac{cR}{p}$.

* Anwendung. Wenn die Erde von der Sonne am weitesten entfernt ist, welche Entfernung 11912 Erdmesser beträgt, dann hat sie eine Geschwindigkeit von 4 Meilen in einer Sekunde; — wie groß wird dieselbe seyn, wenn die Erde am nächsten bey der Sonne ist, wenn sie nämlich 11518 Erdmesser entfernt ist?

91. Jeder auf der Oberfläche der Erde geworfene Körper, es mag seine anfängliche Richtung

a) horizontal, oder
b) schief

seyn, beschreibt, wenn die Einwirkung der Luft abgerechnet wird, eine Parabel.

92. Nach voraus geschickter Erklärung

a) des Kern- und Bogenschußes,
b) des Richtwinkels, und

c) der Falllinie, sowohl für den Kern- als Bogenschuß

kann erwiesen werden:

1) Daß diese Falllinie beym Kernschuß gleich sey der Brennweite der Bahn: $f = \frac{1}{4} p$.

2) Beym Bogenschuß hingegen dem Brennstrahl: $f = x + \frac{1}{4} p$.

93. Man kann diese Falllinie sowohl beym Kernschuß, als beym Winkelwurfe auch durch Zeichnung sichtbar machen.

94. Aus dem Vorausgehenden lassen sich folgende Sätze erweisen:

1) Die Höhe der Bahn ist gleich dem vierten Theile des Produkts aus der Wurfweite in die Tangente des Richtwinkels: $h = \frac{w.\ \text{tang. } r}{4}$.

2) Die Wurfweite von 45° ist viermal größer als die Höhe der Bahn, das heißt: wenn $r = 45°$, dann ist $4\,h = w$.

3) Die Wurfweite von 45°, oder des gewöhnlichen Probeschußes, ist zugleich ein Größtes, und so groß, als die doppelte Falllinie: $P = 2\,f$, oder $f = \frac{1}{2} P$.

95. Fernere Sätze:

1) Man findet für jeden Richtwinkel die Wurfweite, wenn man die Weite des Probeschußes durch den Sinus des doppelten Richtwinkels multiplicirt: $w = P\ \text{sin. } 2\,r$.

2) Die Wurfweite vom Richtwinkel 15°, der ebenfalls zu Probewürfen gebraucht wird, ist gerade so groß, als die Falllinie, d. h. wenn $r = 15°$, so ist $w = f$.

* Anwendung. Im Jahre 1796 erreichte bey einer Prüfung in Wien eine 90 ℔ schwere Bombe mit 5 ℔ Ladung unter dem Richtwinkel von 45° eine Wurfweite von 9082 Wiener Schuhen; welchen Richtwinkel hätte man bey der nämlichen Ladung wählen müßen, um nur 2400 Schuhe weit zu werfen?

XI.

Statik.

96. Es wird erklärt:

a) Was Statik sey.

b) Was man unter Gleichgewicht verstehe.

c) Wie die Statik abgetheilt werde.

d) Welcher Unterschied zwischen Schwerpunkt und Ruhpunkt Statt habe.

e) Was die Richtungslinie sey.

f) Als was der Schwerpunkt eines Körpers betrachtet werden könne.

97. Lehrsätze:

1) Wird eine unbeugsame, mit schweren Endpunkten versehene Linie durch einen Ruhpunkt so unterstützt, daß beyderseits die Produkte aus Abstand und Gewicht einander gleich sind, so herrscht Gleichgewicht. Ist $DP = dp$, dann wird $PC - pc$, oder $Q - q = 0$ seyn.

2) Wenn e die Entfernung eines an einer Horizontallinie aufgehangenen Gewichts P von einem andern Gewichte p in der nämlichen Linie bedeutet; dann

ist die Entfernung des gemeinschäftlichen Schwerpunkts vom Gewichte P

$$d = \frac{ep}{P + p}.$$

3) Denkt man sich drey Gewichter P, p und π in einer Horizontallinie, wo P von p um e, und P von π um ε absteht, so ist die Entfernung des Schwerpunkts vom äußersten Gewichte P

$$d = \frac{ep + \varepsilon\pi \ldots}{P + p + \pi \ldots}$$

98. Letztere Formel entscheidet über die Entfernung des Schwerpunkts vom äußersten Gewichte,

a) Wenn mehrere Gewichter in verschiednen Entfernungen an einer Horizontallinie aufgehangen sind.

b) Wenn diese Gewichter alle gleich sind.

c) Wenn noch über dieß auch alle gleichweit von einander abstehen, wie dieß bey gleichdicken Körpern, als Walzen und Prismen, der Fall ist.

* Anwendung. An einer acht Schuhe langen Stange, deren Schwere von keinem Belang ist, sind an den Endpunkten Gewichter von 12 und 20 ℔ angebracht; wohin fällt der Schwerpunkt?

99. Jeder feste Körper hat einen bestimmten Schwerpunkt.

100. Des statischen Moments

a) Begriff,

b) Nutzen.

101. Das Differential des statischen Moments für Körper, die aus der Umdrehung einer geometrischen Figur entstanden, hat diesen Ausdruck:

$$d M = \pi y^2 x d x.$$

102. Darans kann unter andern erwiesen werden:

1) Daß des Kegels Schwerpunkt um $\frac{3}{4}$ seiner Länge von der Spitze entfernt sey.

2) Daß sich bey einem Kegelrumpfe der Schwerpunkt durch die Formel bestimmen lasse:

$$x = \frac{l (4 D^2 + 2 d D + d^2)}{4 (D^2 + d D + d^2)}.$$

103. Letztere Formel beantwortet auch nebenher noch die 2 Fragen:

1) Wo liegt der Schwerpunkt im ganzen Kegel?

2) Wo in der Walze?

104. Hauptgesetze der Statik

a) In Bezug eines jeden Körpers auf seinen Schwerpunkt;

b) In Hinsicht der Unmöglichkeit und Nothwendigkeit des Falls schwerer Körper.

XII.

Mechanik.

105. Es wird erörtert,

a) Was man 1) unter Maschine, und

2) unter Mechanik verstehe.

b) Wie die Maschinen abgetheilt werden.

106. Des mechanischen Moments, oder des Moments der Trägheit

a) Begriff,

b) Nutzen.

107. Das Differential des mechanischen Moments jedes durch Umdrehung einer geometrischen Figur erzeugten Körpers ist

$$d\,\mathfrak{M} = \pi\, y^2\, x^2\, dx.$$

108. Daraus folgt unter andern,

1) Daß ein Zylinder, folglich auch ein Prisma, seinen Schwungpunkt um $\frac{2}{3}$ seiner Länge unter dem Aufhangspunkte habe.

2) Daß bey einer Kugel, die im Scheitel aufgehangen wird, der Schwungpunkt um $\frac{2}{5}$ des Halbmessers unter dem Mittelpunkt liege. u. s. w.

109. Des Hebels

a) Erklärung,

b) Theile,

c) Gattungen,

d) Gleichungen.

* Die Gleichung $PD = pd$ ist im Stande, alle möglichen Richtungen der Last und Kraft sammt den erforderlichen Lagen der beyden Arme anzugeben.

110. Beym Winkelhebel sowohl, als bey andern, wo Kraft und Last, oder auch beyde zugleich eine schiefe Richtung nehmen, sind die Lothen vom Ruhpunkt aus auf die Richtungslinien hingezogen als die gehörigen Distanzen anzusehen.

111. Des Hauptgesetzes der Mechanik

a) Inhalt, b) Beweis.

112. Im zusammengesetzten Hebel findet man die erforderliche Kraft, wenn man die Last mit allen ihren zugehörigen Distanzen multiplicirt, und durch das Produkt aus allen Distanzen der Kraft theilet:

$$P = \frac{p\,d\,\delta\,\mathfrak{d}\,..}{D\,\Delta\,\mathfrak{D}\,...}$$

Hat aber sowohl die Kraft, als die Last, durchaus einerley Distanzen, dann läßt sich der Ausdruck so abkürzen:

$$P = \left(\frac{d}{D}\right)^n.$$

113. Der gemeinen Krämmerwaage
- a) Erklärung,
- b) Gesetz,
- c) Praktische Regeln, nebst dem Grund derselben.

* Muschenbröcks Verfahren, mittels einer falschen Waage das ächte Gewicht einer Waare zu erforschen. Gesetzt, daß der Betrug in der ungleichen Länge der Arme bestehe.

114. Der Schnellwaage
- a) Begriff,
- b) Gleichung,
- c) Regeln zur Verfertigung derselben.

115. Des Rades an der Welle
- a) Erklärung,
- b) Gattungen,
- c) Gesetz oder Gleichung.

116. Nachdem a) die zweyerley Arten Zahnräder,

b) ihre Theile, und

c) das Räderwerk erkläret worden, lassen sich folgende zwey Gesetze erweisen.

1) Für die Kraft gilt bey jedem Räderwerk die Formel: $P = \frac{p\, r\, \varrho\, \mathfrak{r} \ldots}{R\, P\, \mathfrak{R} \ldots}$

2) Für die Geschwindigkeit des schnellsten Rades: $c = \frac{N\, N\, \mathfrak{N} \ldots}{n\, \nu\, \mathfrak{n} \ldots}$

117. Der Rolle

a) Erklärung,
b) Abtheilung,
c) Gesetz, und
d) Nutzen.

118. Nach festgesetzten Begriffen

a) vom Rollensystem, und
b) vom Flaschenzug,

wird erwiesen, daß beym ersten $P = \frac{p}{2^n}$,

beym zweyten $P = \frac{p}{n}$ sey.

119. Der schiefen Fläche, als Grundmaschine,

a) Abtheilung,
b) Gleichungen.

120. Beym Keil ist $P = 2c \tang. \frac{1}{2} n$, woraus zugleich als Folgesätze hervorgehen:

a) Daß unendlich spitzige Körperformen alle Materien von endlichem Zusammenhange durchdringen können.

b) Daß eine Fläche nie durch feste,

c) wohl aber durch flüßige Körper zu dringen vermöge.

121. Ist die Schraube endlich, dann gilt $P = \frac{w\,p}{2 l \pi}$; ist sie unendlich $P = \frac{d\,p}{2 n k}$, wo w die Weite der Schraubengänge, l die Länge des Ziehbengels, d den Durchmesser der Welle, und k die Kurbellänge bedeutet.

122. Nachdem die Reibung a) erklärt, und

b) abgetheilt worden, lassen sich

1) Die Umstände angeben, wovon sie abhängt;

2) Einige Erfahrungen als Sätze aufstellen;

3) Mittel an die Hand geben, sie nach Möglichkeit zu vermindern.

XII. Hydro-

XII.

Hydrostatik.

123. Der Hydrostatik
a) Begriff,
b) Eintheilung.

124. Gesetze des Gleichgewichts flüßiger Körper unter sich:

1) Ungleichartige Flüßigkeiten, die sich nicht vermischen, haben in Gemeinschaftsröhren dann Ruh, wenn überall das Produkt aus der Höhe in die eigenthümliche Schwere das nämliche ist, das heißt, wenn $a\,g = A\,G$.

2) Gleichartige Flüßigkeiten haben in Gemeinschaftsröhren Ruh, wenn überall gleiche Höhe herrscht, wenn nämlich $a = A$ ist.

* Anwendung. Es werde Salzsohle und Baumöl so in zwey Gemeinschaftsröhren gegossen, daß zu unterst die Gränzfläche dieser beyden Flüßigkeiten zu stehen kömmt, und die Salzsohle in der einen Röhre 5 Zoll Höhe erreicht; wie hoch wird auf der andern Seite das Baumöl aufsteigen?

125. Gesetze des Druckes flüßiger Körper:
1) Der Druck einer Flüßigkeit in einem Gefäß pflanzt sich allerwärts fort, und ist nach allen Wänden des Gefäßes, die dieselbe berührt, gleichförmig vertheilt.

2) Der Druck auf den horizontalen Boden eines Gefäßes (das Gefäß mag gebauet seyn, wie es will) ist allemal wie das Produkt aus der Grundfläche in die senkrechte Höhe; oder sie läßt sich vielmehr durch die Gleichung ausdrücken: $p = a B g \mu$, wo B die ganze Grundfläche, g die eigenthümliche Schwere, und μ das Gewicht eines Kubikschuh Wassers bedeutet.

3) Der Druck auf einen senkrechten Seitentheil ist gleich dem halben Druck auf eine gleiche Bodenfläche.

126. Gesetze des Gleichgewichts fester Körper mit flüßigen:

1) Jeder feste Körper, der eigenthümlich schwerer als die Flüßigkeit ist, verliert im versenkten Zustande so viel von seinem Gewichte, als das Gewicht der Flüßigkeit beträgt, die er aus der Stelle drängt; daher $j = \gamma \mu v$, wo γ die eigenthümliche Schwere der Flüßigkeit anzeigt.

2) Für das Wasser ist $j = \mu v$, und wenn statt der geometrischen Größe des festen Körpers sein Gewicht bekannt ist:

$$j = \frac{p}{g}.$$

3) Um das Gewicht anzugeben, womit der feste Körper noch gegen den Boden drückt, dient die Formel:

$$\pi = \frac{p(g - 1)}{g}.$$

Daraus ergeben sich die Umstände:

a) wenn der Körper abwärts,

b) wenn er aufwärts drückt oder schwimmt,

c) wenn er keines von beyden thut, sondern in jeder Lage ruhig bleibt.

* Anwendung. Ein Stein, der 7 ℔ wiegt, verliert im Wasser $3\frac{1}{4}$ ℔; wie groß ist seine eigenthümliche Schwere?

127. Gesetze beym aufgehobenen Gleichgewichte der Flüßigkeiten:

1) Die Geschwindigkeit der aus kleinen Oeffnungen irgend eines Gefäßes hervordringenden Flüßigkeit ist die nämliche, welche durch den Fall von der Höhe des Wasserspiegels bis zur Oeffnung erreicht wird.

$$c = 2\sqrt{gh}.$$

2) Die Sprungweite des Wasserstrahls für horizontale Oeffnungen läßt sich bestimmen; sie ist

$$w = 2\sqrt{hp},$$

wo p die Tiefe unter der Oeffnung anzeigt.

3) Auch die Menge des Wassers, welche während einer gegebenen Zeit heraus fließt, ohne daß der Wasserspiegel merklich niedriger wird, kann angegeben werden; sie ist

$$q = \frac{d^2 \pi \, t \sqrt{ag}}{2}, \text{ oder}$$

$$q = \frac{1}{4} d^2 \pi t \mu \sqrt{gh}.$$

* Anwendung. Der Wein steht in einem Faße 25 Zoll hoch über den Hahn, dessen Oeffnung einen Zoll hat; wie viele Maaß rinnen in 6 Sekunden heraus?

128. Gesetze über die Wirkung der Flüßigkeiten auf feste Körper.

1) Schlägt fließendes Wasser lothrecht auf eine ruhende, bewegliche Fläche an, so verhält sich die Größe der Bewegung wie das Produkt aus der Fläche selbst in das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers:

$$q : Q = p\, c^2 : P\, C^2.$$

2) Schlägt es schief an, so verhält sich die Größe der Bewegung zur vorigen wie der Sinus des Winkels, den die Fläche mit der Stromrichtung macht:

$$q : Q = \sin.\, \phi : 1.$$

3) Beweget sich eine Fläche lothrecht gegen die strömende Flüßigkeit, so erfordert sie eine Bewegungsgröße, die wie das Quadrat der Summe beyder Geschwindigkeiten ist:

$$q : q = (C + c) : (\mathfrak{C} + \mathfrak{c}).$$

4) Geschieht endlich die Bewegung beyder Körper nach einerley Richtung, so muß ihre Größe wie das Quadrat der Differenz ihrer Geschwindigkeiten seyn:

$$q : q = (C - c)\, (\mathfrak{C} - \mathfrak{c}).$$

Sätze
aus
der physischen Chemie.

Seinen Schülern
zur Prüfung vorgelegt
vom
Professor Prändel.

München, bey Joseph Lentner, 1804.

1. Der Scheidekunst
   a) Begriff,
   b) verschiedne Ansichten,
   c) Hauptgeschäfte,
   d) Werkzeuge.

* Ein praktisches Verfahren, wodurch bestimmt wird, aus wie viel Salpeter, Schwefel und Kohlen ein gegebenes Schießpulver zusammengesetzt sey.

2. Nachdem gezeigt worden, worin sich die chemische Zerlegung eines Körpers von der mechanischen unterscheidet, werden die chemischen Bestandtheile eingetheilt in
   a) Edukte und Produkte,
   b) nächste, entfernte und uranfängliche.

3. Der Salze
 a) Begriff,
 b) Abtheilung,
 c) Unterabtheilung.

* Was heißt Säuerling oder Halbsäure? was ein Saures? was eine Säure? eine übersaure Säure? was Oxygéne oder Oxygenium?

4. Aufzählung
 a) der mineralischen,
 b) der thierischen Säuren,
 c) der Pflanzensäuren.

5. Eben dieser Säuren
 a) Ursprung,
 b) Bereitungsart,
 c) Gestalt, und
 d) Bestandtheile.

* Was ist Scheidewasser? was Königswasser?

6. Erklärung und Anzahl
 a) der Laugensalze,
 b) der Neutralsalze,
 c) der Mittelsalze.

* Wie werden die Laugensalze erzeuget?

** Was ist Salmiak, Gyps, Bittersalz, Glaubersalz, gemeiner Alaun, Salpeter und Kochsalz?

7. Nachdem gesagt worden, was man unter Wahlverwandtschaft und Scheidemittel verstehe, läßt sich angeben, welche chemische Behandlungen

a) den

a) den Zusammenhang der festen Körper vermindern, oder ganz aufheben;
b) denselben vermehren;
c) den Zusammenhang der flüßigen Körper aufheben;
d) die Auflösung vom Scheidemittel befreyen;
e) und welche Behandlung durch eine innerliche Bewegung Körpermassen auflösen, und durch eine neue Verbindung frische Körper erzeugen.

8. Der Auflösung (solutio chemica)
a) Begriff,
b) doppelter Weg,
c) Arten.

9. Hieher gehören die Fragen:

1) Warum können sich feste Körper nicht einander auflösen?
2) Wann ist die Auflösung zwischen einem flüßigen und festen Körper möglich?
3) Was versteht man unter Sättigungspunkt?
4) Was ist unbedingte, und was rücksichtliche Sättigung?
5) Woher kömmt manchmal das Aufbrausen bey Auflösungen.

10. Der Auftreibung (sublimatio)
a) Begriff,
b) Erzeugniße,
c) physische Erklärung.

11. Erklärung
- a) des Verkalkens,
- b) des Saffrans,
- c) des Rostes,
- d) des Brennens,
- e) des Röstens,
- f) des Einäscherns.

12. Der Verkalkung (calcinatio)
- a) doppelter Weg,
- b) verschiedne Arten.

13. Verschiedenheit der Kalke
- a) des Bleys,
- b) des Zinns,
- c) des Eisens,
- d) des Zinks, Arseniks und Wismuths,
- e) des Quecksilbers auf trocknem Wege.

14. Thatsachen und Erklärungen betreffend:
- a) Die Gewichtszunahme der Metallkalke;
- b) Die Abnahme des Gewichts der reinen Luft während dem Verkalken;
- c) Das Gegentheil von beyden bey Wiederherstellung der Metalle aus Kalken;
- d) Die Feuerbeständigkeit einiger Metalle;
- e) Den Unterschied der edeln und unedeln Metalle;
- f) Die zweyerley Arten der Metallverkalkung auf nassem Wege.

* Verschiedene Benennungen der Metallkalke.

15. Der Verglasung (vitrificatio)

a) Begriff,
b) gemeine Erforderniße,
c) Behandlung,
d) Nutzen.

* Wie kann man Gläsern Farben geben?

16. Des Abdampfens (evaporatio)

a) Begriff,
b) Abtheilung,
c) Beförderung,
d) Unterschied gegen die Auftreibung gehalten.

17. Des Abtröpfelns (destillatio)

a) Erklärung,
b) Aehnlichkeit mit der Sublimation,
c) Arten.

* Was ist Alkohol, Aether, Naphta, Hofmanns schmerzstillender Geist?

** Was verstehet man unter dem Todtenkopf der Alten, unter Mohrenkopf und Marienbad?

18. Der Fällung oder Niederschlagung (praecipitatio)

a) Begriff,
b) Erzeugniße,
c) Bezweckungsarten.

* Wie werden Silber= Kupfer= Eisen= und Zinkauflösungen metallisch niedergeschlagen? wie im verkalkten Zustande? Wie werden Weingeist= und Wasserauflösungen niedergeschlagen?

19. Da

19. Da die schädlichen Weinverfälschungen vorzüglich durch Niederschlagsarten entdeckt werden können, so nehmen wir hier Gelegenheit zu sagen,

a) Aus welcher Absicht man Bleykalk, Bleyglätte, Bleyzucker dem Weine beysetzet?

b) Was für Folgen so eine Verfälschung für die Gesundheit habe?

c) Durch welches Mittel man diesen Betrug entdecken könne?

d) Worin die hahnemannische Weinprobe bestehe?

20. Von gleichem Schlage sind die Fragen:

1) In welchen Weingattungen kann Quecksilbersublimat oder Arsenik vermuthet, und wie entdeckt werden?

2) Wie und warum werden Weine geschwefelt, und wodurch kann man ihnen die Ueberschweflung benehmen?

3) Welche Mittel hat man bey verdächtigen Weinen, um auf das Daseyn des Schwefels mit Gewißheit zu schließen?

4) Wann kann ein Zusatz vom Buchenaschen, gemeiner Lauge oder Pottasche beym Bier anwendbar werden? — Wann ist dieser Zusatz schädlich, und wie läßt er sich entdecken?

21. Nachdem gesagt worden,

a) was man unter einem Gase verstehe;

b) was die Gase für eine Hauptabtheilung und Untereintheilung verstatten;

c) was die Gasbildung sey;

dann

dann läßt sich angeben des Sauerstoffgases

a) Erzeugung,

b) Eigenschaften,

c) Bestandtheile,

d) Nutzen.

* Was hat das Sauerstoffgas noch für Benennungen?

22. Da unter der grossen Menge der verschiednen Gasarten

a) das Wasserstoffgas,

b) das Stickgas,

c) das kohlensauere Gas,

die merkwürdigsten sind, so sollen auch von jeder derselben die obigen vier Punkte, nämlich die Erzeugung, Eigenschaften, Bestandtheile und Nutzen angegeben werden.

* Synonime dieser Gase.

23. Der Krystallbildung (crystallisatio)

a) Erklärung,

b) doppelter Weg.

* Was versteht man unter Anschußwasser oder Krystallisationseis? und welche Erscheinungen lassen sich daraus erklären?

24. Es kann gesagt werden,

a) Was Gährung überhaupt sey;

b) Wie sie nach verschiednen Ansichten abgetheilt werde;

c) Welche Substanzen einer jeden Gährung fähig sind;

d) Welche begünstigende Umstände dazu erfordert werden.

25. Erschei-

25. Erscheinungen und physische Erklärung
a) der weinigten oder geistigen,
b) der sauern,
c) der faulen Gährung.

* Warum schäumen die Champagnerweine? Warum sind die alten Weine besser als die jungen? Warum ist es todsgefährlich, Weinkeller während der Gährung zu betreten?

26. Es mag noch überdieß erklärt werden,
1) Was man unter Gährmittel verstehe?
2) Wodurch Körper gegen die Faulung geschützet werden?
3) Welchen Theilen der Körper die zerstörende Kraft der Natur oder Kunst nichts anhaben könne?
4) Wie viel solcher Urstoffe oder Elemente die neuern Chemiker zählen?

Sätze
aus
der sonderheitlichen Naturlehre.

Seinen Schülern
zur Prüfung vorgelegt
vom
Professor Prändel.

München, bey Joseph Lentner, 1804.

I.
Von der Wärmematerie.

1. Der Wärmematerie
   a) Erklärung,
   b) Verschiedene Entbindungsarten.

2. Das Gesetz der Körperausdehnung mittels der Wärme richtet sich
   a) weder nach der Lockernheit,
   b) noch nach der Dichtigkeit der Körper.

3. Aus dem verschiedenen Verhältniße der ausdehnenden Kraft der Wärme zu den Ziehkräften der Elemente auf einander läßt sich
   a) die feste,
   b) die tropfbar flüßige,

c) die dampfförmige, und

d) die luftförmige Gestalt der Körper erklären.

* Merkwürdig ist hiebey die Federkraft der Dämpfe.

4. Da uns die Ausdehnung der flüßigen Körper in Stand setzt, die Wärme der Dunstkreisluft und andrer Flüßigkeiten auf eine gewisse Art abzumessen, so muß hier erörtert weroen die Einrichtung des Wärmemessers (Thermometers)

a) vom Reaumür,

b) — Zelsius,

c) — Fahrenheit und, d) De Lisle.

* Bey welchen Nationen sind diese 4 Wärmemesser üblich?

5. Bey der Verwandlung der Grade dieser vier verschiedenen Wärmemessern in einander lassen sich bestimmte Regeln angeben:

a) Wenn Reaumürische Grade auf Zelsische, oder wechselsweise, gebracht werden sollen.

b) Wenn Fahrenheitische Grade gegeben sind, um selbe in Reaumürische oder Zelsische zu verwandeln.

c) Wenn Reaumürische oder Zelsische auf Fahrenheitische zu bringen sind.

d) Wenn Delislische in Reaumürische oder Zelsische umgesetzt werden sollen.

e) Wenn man Reaumürische oder Zelsische Grade in Delislischen ausdrücken will.

f) Wenn Delislische in Fahrenheitischen, oder diese in jenen gegeben werden müßen.

g) Wenn die Angaben vom Reaumür, Fahrenheit und Zelsius Grade unter dem Eispunkte enthalten.

* Das Reaumürische Thermometer weiset im Karlsbader Sprudelwasser $59\frac{1}{2}°$; was zeigen die übrigen?

** Eine

** Eine Formel zu berechnen, wodurch Künstler in Stand gesetzt werden, zu jeder Jahreszeit ein Thermometer zu verfertigen.

6. Hier ist auch der Ort anzumerken:

a) Welche Vorzüge zur Füllung der Thermometer der Weingeist,

b) und welche hierinfalls das Queckfilber habe.

c) Unter was für Umständen diese Art Wärmemesser nichts mehr taugen.

d) Und welche Werkzeuge vorzüglich geschickt sind, höhere Hitzgrade zu messen.

7. Des Wedgwoodischen Hitzemessers

a) Beschreibung,

b) Vergleichung mit den Thermometern.

* Wie lang mag ungefähr ein Wedgwoodischer Pyrometer seyn?

8. Die verschiedenen Grade der Wärme veranlassen noch die Fragen:

1) Was geht in den meisten flüßigen Körpern vor, wenn ihnen die Wärme nach und nach entzogen wird?

2) Wie muß das Gefrieren erklärt werden?

3) Wie läßt sich auf künstliche Art Eis erzeugen, und die Erzeugungsart erklären?

4) Was spielen die Salze beym künstlichen Frost für eine Rolle?

9. Da der Wärmestoff auf verschiedene Weise in den Körpern zugegen seyn kann, so theilen wir denselben in dieser Hinsicht ab:

a) in unfühlbaren, der bald chemisch gebunden, bald anklebend (adhærens) seyn kann.

b) in fühlbaren oder freyen Wärmestoff, wobey zugleich gesagt werden soll, was man unter Temperatur verstehe.

10. Es giebt noch andere Ansichten, nach welchen die Wärme beurtheilt wird; daher die Eintheilungen derselben

a) in ursprüngliche und mitgetheilte;
b) in unbedingte und eigenthümliche Wärme.

11. Die Größe der unbedingten Wärme eines Körpers hängt ab

1) von der Masse dieses Körpers,
2) von der Lockernheit derselben,
3) von der herrschenden Temperatur.

Es ist also $q = mrt$.

12. Dieser Ausdruck wird brauchbarer, nachdem er folgende Gestalt angenommen $q = \frac{pt}{g}$, woraus die Proportion folgt $q : Q = \frac{pt}{g} : \frac{PT}{G}$.

* Wie vielmal mehr unbedingte Wärme enthalten 12 Pfund siedendes Wasser als 5 Pfund schmelzendes Bley; da letzteres bey 540° F. schmilzt, und Wasser bey 212° F. siedet? Die eigenthümliche Schwere des Bleyes ist 11,3.

13. Um die Temperatur einer Mischung verschiedenartiger Körper von verschiednen Temperaturen und Gewichtern zu bestimmen, dient die Formel $x = \frac{gPT + Gpt}{gP + Gp}$.

14. Diese Formel ändert sich ab,

1) Wenn die Gewichter einerley sind.
2) Wenn man Körper gleicher Art mischt.
3) Wenn beyde Bedingungen zugleich Platz greifen.

4) Wenn vor der Mischung überall einerley Temperaturen geherrscht haben.

5) Wenn bloß die Massen oder Gewichter verschieden sind, folglich alles übrige gleich ist.

* Man mischt 1 Pfund Wasser von 44° F. mit 1 Pfund Quecksilber von 110° F.; welche Temperatur wird die Mischung haben?

15. Des Laplacischen Calorimeters

a) Beschreibung,

b) Zweck,

c) algebraische Berechnung der Resultate dieses Calorimeters sowohl für feste als flüßige Körper.

Im ersten Falle ist $w = \frac{60\,e}{p\,t}$;

im zweyten $w = \frac{60\,E - \pi\,t\,\beta}{p\,t}$.

16. Es läßt sich theils aus Versuchen, theils aus Schlüssen beweisen,

a) daß freyer Wärmestoff gebunden werde,

1) wenn sich feste Körper verwandeln in tropfbar flüßige;

2) tropfbarflüßige in Dämpfe; oder

3) Dämpfe in luftförmige Massen.

b) Daß hingegen gebundner Wärmestoff frey werde, wenn bemeldte Verwandlungen umgekehrt geschehen.

II.

Vom Lichte.

17. Erklärung des Lichts und Abtheilung der Körper in Rücksicht desselben.

18. Es

18. Es läßt sich darthun, daß sich das Licht
a) geradlinicht;
b) nicht plötzlich, sondern allmählig;
c) aber mit beyspielloser Geschwindigkeit, und
d) in gleichförmiger Bewegung fortpflanze.

19. Die Stärke des Lichts steht im umgekehrten Quadratverhältniße mit dem Abstand des leuchtenden Punkts vom Auge:

$$i : I = D^2 : d^2.$$

20. Um in verschiednen Entfernungen von einer Parthie brennender Kerzen immer gleiche Stärke des Lichts zu genießen, muß sich die Anzahl dieser Kerzen überall wie das Quadrat der Entfernung verhalten:

$$n : N = d^2 : D^2.$$

Anwendung. Wenn 5 Kerzen z. B. nebeneinander brennen, kann man sich 9 Schuh davon entfernen, um noch ein Buch lesen zu können. Wie viel solcher Kerzen müßen brennen, wenn man das nämliche Buch in einer Entfernung von 16 Schuhen lesen will?

21. Es kann ferner gezeigt werden, daß die Lichtstrahlen
a) unbegreiflich fein seyn müßen;
b) sich durch scharfe Kanten fester Körper von der geraden Linie ablenken lassen;
c) in durchsichtigen Körpern eine verschiedene Brechbarkeit beweisen;
d) das gewöhnliche Abprellungsgesetz federharter Körper befolgen; und
e) aus verschiednen Farben zusammengesetzt seyen.

22. Von der prismatischen Erscheinung muß noch nachgetragen werden, was geschieht:

1) Wenn man das ganze Farbenbild vor der weißen Wand durch eine große Glaslinse sammelt;
2) Wenn ein einzelner Farbenstrahl durch eine kleine Oeffnung der Wand gelassen, und mittels eines zweyten Prisma auf eine zweite weiße Wand hingespielt wird;
3) Wenn zwey Farben durch zwey kleine Oeffnungen der Wand gelassen, dann mittels zweyer Prismen in ein Bild vereinigt, und auf eine neue weiße Wand hingeworfen werden.
4) Wenn man dieses Farbengemenq durch ein viertes Prisma auf eine dritte weiße Wand hinstrahlen läßt.

23. Von der Brechbarkeit des Lichts ist noch nachzuholen:

a) Worin das Brechungsgesetz des Lichtstrahls von dem der festen Körper abweiche;
b) Nach welchem Maaße gewöhnlich das Verhältniß des Einfallswinkels zum Brechungswinkel angegeben werde;
c) Wie sich daraus die besondere Erscheinung erklären lasse, daß wir die Gegenstände im Wasser, z. B. die Fische, an einem andern Orte sehen, als wo sie wirklich sind.
d) Warum ein schief ins Wasser versenkter Stab gebrochen erscheine.
e) Warum wir die Gestirne über dem Horizonte höher, unter demselben aber tiefer sehen, als sie wirklich sind.
f) Warum uns Sonn und Mond im Auf- und Niedergange, besonders im Aufgange, so groß erscheinen.

An-

Anwendung. Wenn die Tiefe eines hellen Flußes bekannt ist, und sich auf dem Grunde ein Objekt befindet; so kann aus dem Winkel, den die Gesichtslinie mit dem Horizonte macht, die Größe des Irrthums gefunden werden, den das Auge begeht.

Er ist $x = p \left(\text{cos.}\,\phi - \frac{3\ \text{cos.}\,\phi}{\sqrt{(16 - 9\ \text{cos.}^2\,\phi)}} \right)$.

24. Da die Lehre des Schattens mitunter zur Theorie des Lichts gehört, so kann hier gesagt werden,

a) Wie der Schatten entstehe.
b) Welche Umstände die mathematische Bestimmung desselben erleichtern.
c) Daß sich die Länge des Schattens, im Fall die Lichtkugel größer ist als die dunkle Kugel, durch die Formel bestimmen lasse: $l = \frac{d\,r}{R - r}$.
d) Daß, wenn beyde Kugeln gleiche Größe haben, oder wenn die dunkle Kugel größer ist als die Lichtkugel, die Länge des Schattens unendlich groß sey.

Anwendung. Der Halbmesser der Sonne ist 112 Mal größer als der der Erde, und ihr mittlerer Abstand beträgt 24000 solcher Halbmesser, wie lang ist der Schattenkegel der Erde?

25. Aus der Schattenlänge eines lothrechten Objekts, z. B. eines Thurms oder Baums, läßt sich die Höhe desselben, wenn die Sonnenhöhe bekannt ist, durch Rechnung bestimmen. Es ist $h = u.\ \text{tang.}\,\phi$, und zur Zeit der Nachtgleiche an Mittag. $h = u.\ \text{cotang}\ p$.

Anwendung. Ein Thurm wirft zur Zeit der Nachtgleiche allhier einen Schatten von 393 Schuh; wie hoch ist er?

III. Opti-

III.

Optische Wissenschaften.

26. Begriff
   a) der Optik,
   b) der Katoptrik,
   c) der Dioptrik.

27. Des menschlichen Auges Zergliederung.

28. Nachdem erklärt worden, was man unter Sehwinkel und unter scheinbarer Größe versteht, läßt sich der Satz erweisen:

Man findet die wahre Größe eines Gegenstands, wenn man die Entfernung desselben mit der scheinbaren Größe fältigt: $v = a\,e$.

Anwendung. Ein Kirchthurm, der 240 Schuh hoch ist, hat von ferne nur mehr $2\frac{1}{2}$ Linie scheinbare Größe; wie weit ist er entfernt?

29. Des Spiegels
   a) Erklärung,
   b) Abtheilung.

30. Es soll angegeben werden:
   1) Unter welcher Bedingung man einen Gegenstand im Spiegel sehen könne.
   2) Wo der Ort des Bildes in ebnen Spiegeln sey.

31. Auch läßt sich erweisen,

1) Daß das Bild in ebnen Spiegeln gerade so weit hinter denselben erscheint, als weit sich der Gegenstand vor denselben befindet.

2) Bey Hohlspiegeln drückt diese Entfernung die Formel aus: $x = \frac{dr}{2d - r}$.

3) Bey erhabnen Spiegeln $x = -\frac{dr}{2d + r}$.

* Auch durch diese Formel ist es erweislich, daß bey ebnen Spiegeln das Bild gerade so weit hinter ihnen erscheint, als groß ihre Entfernung vom Gegenstand ist.

32. Des Glases

a) allgemeines Gesetz, den Lichtstrahl zu brechen;

b) mancherley dazu dienliche Formen.

33. Man findet den Vereinigungspunkt der Sonnenstrahlen für doppelt erhabne Linsengläser mittels der Formel:

$$x = \frac{\left(\frac{mr}{m-1} - \mu\right) R}{m(R+r) - \mu(m-1)};$$

wo r und R die beyden Halbmesser der Krümmung, der kleinere Brechungssinus $= 1$ und der größere $= m$, dann die Dicke der Linse $= \mu$ gesetzt ist.

34. Abänderung dieser Formel für den Brennpunkt

a) ebenerhabner (planoconvexa),

b) mondförmiger (menisci),

c) ebenhohler (planoconcava),

d) Doppelt hohler, sowohl von gleichen als ungleichen Halbmessern der Krümmung. (concavoconcava),

e) hohlerhabner Gläser (planoconvexa vitra).

* Wie groß ist die Brennweite einer ganzen; wie groß der einer halben Glaskugel?

IV.

Von der Elektricität.

35. Der Elektricität
    a) Begriff,
    b) Entdeckungsgeschichte.

36. Eintheilung der Körper in dieser Hinsicht
    a) in Leiter,
    b) in Nichtleiter, und
    c) in Halbleiter, nebst ihrer Aufzählung.

37. Angebliche Ursache über die Verschiedenheit der Elektricität
    a) in Glas und Harz,
    b) bey der Leidnerflasche.

* Was versteht man unter Batterie? was unter Elektrophor?

38. Es lassen sich auch die Wirkungen vorhersagen, wenn die elektrische Materie
    a) durch Stickgas und Sauerstoffgas,
    b) durch Salpetergas,
    c) durch flüchtig alkalisches Gas, und
    d) durch Wasser fährt.

39. Anwendung der Theorie der Elektricität
    a) gegen Hochgewitter, und
    b) gegen einige Krankheiten.

 V. Galva-

V.

Galvanismus und Magnetismus.

40. Des Galvanismus (Mettallreizes)
    a) Begriff,
    b) Entdeckungsgeschichte.

* Was ist die Voltaische Säule? und welche Metallplatten zeigen sich dabey am wirksamsten?

41. Erscheinungen bey den galvanischen Versuchen,
    a) die mit den elektrischen übereinskommen;
    b) die davon abweichen oder mit ihnen ganz im Widerspruche stehen.

42. Vom Magnete mögen folgende Fragen beantwortet werden:
    1) Was der Magnet eigentlich sey.
    2) Was man unter den Polen eines Magnets verstehe, und welche Namen sie führen.
    3) Wann ein Magnet bewaffnet heiße.
    4) Was ein künstlicher Magnet sey.
    5) Wie man die Pole zweyer Magnete in Bezug aufeinander zu benennen pflege, und warum.

* Vorzüglicher Nutzen des Magnets.

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Uebersicht der Mathematik und Physik

München 1804

4 Math.u. 90
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525720-4